Math. Un. 213 b

Math. u. 213 b-4

<36619844340012

<36619844340012

Bayer. Staatsbibliothek

Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wissenschaften

Letzter Theil/

Welcher so wohl die gemeine Algebra/ als die Differential- und Integral-Rechnung/ und einen Anhang von den vornehmsten Mathematischen Schrifften in sich begreiffet,

Und zu mehrerem Aufnehmen der Mathematick so wohl auf hohen als niedrigen Schulen aufgesetzet worden

Von

Christian Wolffen/

Königl. Preuß. Hof-Rathe und Math. & Natur. P. P. O.
der Königl. Groß-Britannischen/ wie auch der Königl. Preuß. Societät der Wissenschafften Mittgliede.

Die andere Auflage/
hin und wieder verbessert und vermehret.

Halle im Magdeburgischen/ An. MDCC XVII.
Zu finden in der Rengerischen Buchhandl.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Anfangs-Gründe
So wohl der gemeinen
Algebra/
Als der
Differential-
Und
Integral-Rechnung.

Vorrede

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Geneigter Leser!

Die Algebra kan niemahls zuviel gerühmet werden: denn sie ist eine Kunst / durch welche man mathematische Wahrheiten von sich selbst erfinden kan. Wenn ihr demnach die Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschaften / die ich in den drey vorhergehenden Theilen erkläret habe / euch bekandt machet und die Algebra dabey studiret; so werdet ihr aus jenen durch diese vor euch selbst finden können / was ihr sonst aus Büchern oder von anderen zu lernen von Nöthen hättet. Ja ihr werdet auch vieles erfinden können / was andere vor euch noch nicht gedacht haben. Mit einem Worte sie machet euch geschickt / daß / wenn ihr nur gantz was geringes aus den mathematischen Wissenschaften gelernet / ihr von euch selbst ein mehreres erfinden könnet zu der Zeit / wenn ihr es von Nöthen habet. Es ist aber keine vollkommenere Art zu studiren / als wenn man nur ein weniges lernen darf und sich dabey doch auf alle vorkommende Fälle geschickt machet. Ich sag aber noch

mehr. Ihr treffet in der Algebra die allervollkommenste Manier zu raisoniren an. Denn sie stellet die Begriffe der Sachen durch Zeichen vor und verwandelt die Schlüsse / welche mit vielem Bedacht aus ihnen hergeleitet werden / in eine leichte Manier die Zeichen mit einander zu verknüpffen und zu trennen. Dadurch erhält man öfters in einer Zeile mehr / als in grossen Büchern nicht Raum finden würde. Durch das Anschauen weniger Zeichen werdet ihr öfters verständiger / als ihr durch vieler Jahre Arbeit nach der gemeinen Art zu lernen und zu dencken nicht werden könnet. In dieser Absicht pfleget man die Algebra den Gipfel menschlicher Wissenschaften zu nennen / und dieses von Rechts wegen. Ich habe demnach so wohl die gemeine Algebra / als die unvergleichliche Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz dergestalt erklären wollen / daß nicht allein ihre Kunst-Griffe unvermercket beygebracht / sondern auch die Haupt-Lehren von der so genanten Mathesi pura zugleich mit erlernet / ja von selbsten gefunden werden.

An-

Anfangs-Gründe Der Algebra.

Der erste Theil.

Von den Anfangs-Gründen der gemeinen Algebra.

Die 1. Erklärung.

1.

Die gemeine Algebra ist eine Wissenschaft aus einigen gegebenen endlichen Grössen / andere ihres gleichen / von denen in Ansehung der gegebenen etwas bekandt gemacht wird / vermittelst gewisser Gleichungen zu finden.

Die 1. Anmerckung.

2. Z. E. Ihr sollet zwey Zahlen finden / die mit einander multipliciret eine gegebene Zahl 60 / hingegen zusammen addiret eine andere gegebene Zahl 17 bringen. Also werden euch gegeben zwey Zahlen und ihr sollet aus denselben zwey andere Zahlen finden / von welchen euch bekandt gemacht wird / daß ihre Summe der kleineren / ihr Product aber der grösseren von den gegebenen Zahlen gleich seyn sol. Die Algebra nun lehret euch nicht allein in gegenwärtigem Falle die verlangten Zahlen / sondern auch eine allgemeine Regel finden / nach welcher ihr alle Exempel von dieser Art rechnen könnet.

Zusatz.

3. Also ist die Algebra eine allgemeine Rechen-Kunst, dadurch man nemlich alles, was sich rechnen läst, ausrechnen kan. (§. 1. Arithm.)

Die 2. Anmerckung

4. Daher nennet auch der grosse Mathematicus in Engelland / Herr Isaac Newton, seine Anweisung zur Algebra Arithmeticam Universalem und wir können die Algebra in unserer Deutschen Sprache mit gutem Fuge eine Allrechen-Kunst heissen/zumahlen wenn man die Buchstaben-Rechen-Kunst mit dazu nimmet.

Die 2. Erklärung.

5. Die Buchstaben-Rechen-Kunst wird diejenige genennet / welche an stat der Ziffern allgemeine Zeichen der Grössen brauchet/und damit die gewöhnlichen Rechnungs-Arten verrichtet.

Die 3. Erklärung.

6. Eine Grösse nennen wir alles dasjenige / was sich vermehren und vermindern läst / in so weit es sich vermehren und vermindern läst.

Der 1. Zusatz.

7. Also bestehet das Wesen einer Grösse in der Verhältnis zu einer anderen ihres gleichen (§. 65. Arithm.)

Die 1. Anmerckung.

8. Z. E. Die Wärme nenne ich in so weit eine Grösse / als ich dencken kan / wie vielmahl eine gegebene Wärme/als die

die Wärme der Luft des heutigen Tages in einer anderen gegebenen Wärme / als in der Wärme der Luft des gestrigen Tages enthalten sey.

Der 2. Zusatz.

9. Und folgends sind die Grössen undeterminirte Zahlen, da man nemlich noch keine gewisse Eines setzet (§. 5. 8. Arithm.)

Die 2. Anmerckung.

10. Nehmet Z. E. eine gerade Linie von einer determinirten Länge. Setzet die Linie sey eingetheilet in 4 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zur Eines machet und die Länge der gantzen Linie mit ihm vergleichet: so heisset die Linie 4 und ihr betrachtet die Länge als eine Zahl. Setzet abermals die Linie sey eingetheilet in 5 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zur Eines machet und die Länge der gantzen Linie mit ihr vergleichet: so heisset die Linie 5 und ihr betrachtet ihre Länge abermahls als eine Zahl. Wiederumb setzet die Linie sey eingetheilet in 13 gleiche Theile und vergleichet ihre gantze Länge mit einem solchen Theile; so heisset sie 13 und ihr betrachtet dieselbe als eine Zahl. Hieraus sehet ihr / daß die Länge einer Linie durch unzehlich viel Zahlen / grosse und kleine ausgesprochen werden kan / nachdem ihr nemlich einen grossen oder kleinen Theil derselben zur Eines annehmet. Wenn ihr nun keinen gewissen Theil setzet / mit welchem sie verglichen werden sol; sondern sie nur überhaupt betrachtet / in so weit sie mit einer gewissen Eines kan verglichen werden: so stellet ihr euch dieselbe als eine Grösse vor. Und daher kommet es / daß durch die Buchstaben-Rechen-Kunst sehr algemeine Wahrheiten erfunden werden: Da hingegen die Rechen-Kunst nur eintzele Exempel ausrechnet und also stets mit eintzelen Fällen zu thun hat.

Der 3. Zusatz.

11. Alles, was wir in der Welt antreffen und in uns selbst finden, hat in allem dem, was es würcklich ist und wovon sich etwas gedencken läst, seine Schrancken und läst sich dannenhero mit anderen Dingen von sei-

ner Art vergleichen und darumb als etwas, so vermehret oder vermindert werden kan, das ist, als eine Grösse (§. 6. 7.) betrachten. Derowegen erstrecket sich die Buchstaben-Rechen-Kunst und Algebra auf alle endliche Dinge und führet uns auf einen deutlichen Begriff von ihrer Endlichkeit.

Die 3. Anmerckung.

12. Es kan keine vollkommnere Erkäntnis gedacht/noch verlanget werden / als wenn man von der Endlichkeit der Dinge einen deutlichen Begriff erlanget : welches ich bey anderer Gelegenheit klar und deutlich ausführen wil. Daher dienet die Algebra zu einer vollkommenen Erkäntnis der Dinge zu gelangen / und ohne sie würde es in den meisten Fällen unmöglich seyn selbige zu überkommen.

Der 4. Zusatz.

13. Weil die Grössen undeterminirte Zahlen sind (§. 9.), so kan man auch keine andere Veränderungen, als wie mit Zahlen, mit ihnen vornehmen, und daher sie entweder zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, oder durch einander multipliciren, oder durch einander dividiren (§. 13. 15. 18. 21. 24. Arithm.)

Die 4. Anmerckung.

14. Gleichwie ihr aber mit Zahlen keine Rechnung vornehmen könnet / ihr müsset euch vorher dieselben durch gewisse Zeichen vorstellen : eben so wird in der Algebra erfordert / daß ihr für die Grössen gewisse Zeichen ersinnet.

Der 1. wilkührliche Satz.

15. Man benenne die gegebenen Grössen jederzeit mit den ersten Buchstaben des Al-

pha-

phabets/ a, b, c, d u. s. w. die unbekandten aber/ welche man suchet/ mit den letzten x, y, z.

Die 1. Anmerckung

16. Wie die Grössen sich dem Verstande zu erkennen geben/ so müssen sie auch durch die Zeichen von einander unterschieden werden. Nun stellen sie sich in den Algebraischen Aufgaben jederzeit dem Verstande vor entweder als gegebene/ das ist/ bekandt gemachte/ oder als gesuchte/ das ist/ noch unbekandte Grössen: Derowegen muß man auch durch die Zeichen unserer Einbildungs-Kraft diesen Unterscheid klärlich vorstellen. Denn sonst wäre Gefahr/ daß man das Unbekandte mit dem Bekandten leicht verwirrete und daher in Irrthum verfiele.

Die 2. Anmerckung.

17. Es wäre bey der Benennung der Grössen noch gar viel zu erinnern. Denn wenn sie geschickt und zum Erfinden dienlich seyn sol/ müssen die Zeichen alle gegebene relationes der bedeuteten Dinge gegen einander andeuten. Z. E. Wenn eine von den unbekandten Grössen drey mahl so groß ist als die andere/ und die kleinere heisset x; so nennet man die grössere lieber $3x$ als y. Allein ich würde den Anfängern nicht dienen/ wenn ich sie mit vielen Regeln auf einmahl überhäuffete. Und halte es dannenhero für rathsamer/ daß ich es inskünftige lieber durch Exempel lehre/ und die Regeln nach und nach gleichsam unvermerckt und ohne Mühe beybringe.

Der 2. willkührliche Satz.

18. Das Zeichen der Addition ist $+$/ der Subtraction aber $-$. Jenes wird durch **Mehr**; dieses durch **Weniger** ausgesprochen.

Anmerckung.

19. Z. E. Die Summe zweyer Grössen a und b wird geschrieben $a + b$ und ausgesprochen: a mehr b. Hingegen die Differentz zweyer Grössen wird geschrieben durch $a - b$ und ausgesprochen: a weniger b. Als es bedeute a 7 Thaler/ b 8 Groschen: so bedeutet $a + b$, 7 Thl. $+$ 8 gl. dus

ist / 7 Thl. und 8 gl.; hingegen a — b, 7 Thl. — 8 gl. das ist 7 Thl. weniger 8 gl.

Der 3. willkührliche Satz.

20. Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen / sondern man setzet die Buchstaben / welche einander multipliciren / ohne einiges Zeichen neben einander: oder man deutet sie durch ein Comma (,) oder einen Punct (.) an. Insgemein brauchet man dieses Zeichen ×.

Anmerckung.

21. Wenn a durch b multipliciret werden sol / so schreibet das Product ab, oder a, b oder a. b, oder a × b. Wir werden uns des letzteren Zeichens niemahls bedienen / weil es leicht mit dem *X* vermenget wird. Doch haben wir es hiermit anführen sollen / weil es in allen Büchern häuffig vorkommet. Am meisten werden wir kein Zeichen brauchen: das Comma und den Punct aber nur in gewissen Fällen aus besonderen Ursachen / die sich zu seiner Zeit in den Exempeln zeigen werden.

Der 4. willkührliche Satz.

22. Wenn eine Grösse viele andere auf einmahl multipliciret / so schliesset man sie in eine parenthesin ( ) ein und setzet jene ohne einiges Zeichen vor oder hinter die parenthesin: oder man setzet zwischen dieselben ein blosses Comma.

Anmerckung.

23. Das Product von a + b — c in d, schreibet entweder also (a + b — c) d, oder dergestalt d (a + b — c), oder auch folgender massen a + b — c, d. Insgemein schreibet man dieses Product also: $\overline{a + b - c} \times d$, oder

auch

auch $d \times a + b - c$. Allein wir bleiben billig bey der Manier des Herrn von Leibnitz / welche mit grossem Vortheile in die Acta Eruditorum Lipsiensia eingeführet worden: denn man kan sich nicht so leicht verirren wie bey den gemeinen Zeichen / und machet auch den Buchdruckern nicht so viel unnöthige Mühe / erspaaret über dieses viel an dem Raume. Andere Vortheile wollen wir jetzt nicht gedencken / die sich in folgendem zeigen werden.

Der 5. willkührliche Satz.

24. Das Zeichen der Division sind zwey Puncte: / oder man schreibet die Buchstaben / welche einander dividiren sollen / wie in der Rechen-Kunst einen Bruch.

Anmerckung.

25. Wenn a durch b dividiret werden sol / so schreibet man den Qvotienten entweder $a : b$ / oder $\frac{a}{b}$ und spricht es beyderseits aus a durch b dividiret.

Der 6. willkührliche Satz.

26. Wenn eine Grösse viel andere auf einmahl dividiret / oder viel andere eine dividiren / so werden / wie in der Multiplication / die vielen in eine parenthesin ( ) eingeschlossen / oder man kan auch an deren stat ein blosses Comma brauchen.

Anmerckung

27. Wenn $a + b$ durch c dividiret werden sol / so schreibet den Qvotienten entweder $(a + b) : c$ oder $a + b, : c$. Sollet ihr a durch $b + c$ dividiren / so ist der Qvotient $a : (b + c)$ oder $a :, b + c$. Wiederumb wenn ihr $a + b$ durch $c + d$ dividiret / so schreibet den Qvotienten $(a + b) : (c + d)$ oder $a + b, :, c + d$. Nach der gemeinen Art

schrei-

chreibet ihr dieſe Qvotient. $a \dot{+} b$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a \dot{+} b}{b \dot{+} c}$, $\frac{a \dot{+} b}{c \dot{+} d}$

$\overline{a \dot{+} b} : c$, $a : \overline{b \dot{+} c}$, $\overline{a \dot{+} b} : \overline{c \dot{+} d}$.

Die 1. Aufgabe.

28. Einerley Gröſſen mit einerley und verſchiedenen Zeichen zuſammen zu addiren.

Auflöſung.

1. Wenn ſie einerley Zeichen haben, ſo zehlet ſie wie in der Rechen-Kunſt zuſammen.
2. Sind aber die Zeichen verſchieden, ſo ziehet von der gröſſeren die kleinere ab, und ſetzet zu dem, was überbleibet, das Zeichen der gröſſeren.

Exempel.

$$\begin{array}{r} a + 2b - 3c - 5d \\ 3a - 2b + 6c + 2d \\ \hline 4a + 3c - 3d \end{array}$$

Beweiß.

Weil die Buchſtaben unbeſtimmte Zahlen ſind (§. 9. 15); ſo könnet ihr einen jeden als Eines anſehen, und demnach die Gröſſen, welche durch einerley Buchſtaben benennet werden, als Dinge von gleicher Art zuſammen zehlen (§. 8. Arithm.). Alle Gröſſen, welche mit dem Zeichen — bemer-

cket

cket werden, fehlen und hingegen die das Zeichen + haben, sind vorhanden. Wenn ich derowegen von beyder Art addiren sol, so wird durch die letzteren der Mangel aufgehoben, und muß freylich die Addition in eine Subtraction verkehret werden. W. Z. E.

Die 1 Anmerckung.

29. Die Grössen / welche mit dem Zeichen — bemercket werden / hat man nicht anders als Schulden anzusehen / und hingegen die anderen mit dem Zeichen + als baares Geld. Und daher nennet man auch die ersten weniger als nichts / weil man erst so viel weg geben muß/als man schuldig ist/ ehe man nichts hat.

Die 2 Anmerckung

30. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher wird / so bildet euch ein / a bedeute 1 thl. b 1 gl. c. 1 pf.

7a — 9b + 5c	7 thl. — 9 gl. + 5 pf.
3a + 5b — 9c	3 thl. + 5 gl. — 9 pf.
10a — 4b — 4c	10 thl. — 4 gl. — 4 pf.

Die 2. Aufgabe.

31. Einerley Grössen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1. Wenn einerley Zeichen sind, und ihr sollet das kleinere von dem grösseren abziehen, so verrichtet die Subtraction wie in Ziffern (s. 49. Arithm.)
2. Sollet ihr aber die grössere von der klei-

neren abziehen, so ziehet die kleinere von der grösseren ab, und zu dem übrigen setzet das Zeichen —, wenn die Grössen + haben: hingegen +, wenn sie — haben.

3. Wenn die Zeichen verschieden sind, so addiret die Grössen, die ihr voneinander abziehen sollet, und zu der Summe setzet das Zeichen derjenigen Grösse, von welcher die Subtraction geschehen solte.

Exempel.

8a --- 5c + 9d	8 thl. --- 5 gl. + 9 pf.
6a — 8c — 7d	6 thl. — 8 gl. — 7 pf.
2a + 3c + 16d	2 thl. + 3 gl. + 16 pf.

9b + 15c — 7d + 8e — f
6b + 20c — 9d — 9e + 7f

3b — 5c + 2d + 17e — 8f

Beweiß.

Weil ihr jeden Buchstaben als Eines ansehen könnet (9. 15); so könnet ihr auch wie in Zahlen die Subtraction verrichten. Allein wenn ihr die grössere von der kleineren abziehet, und sie haben das Zeichen +, als 20c von 15c, so nehmet ihr 20c weg, müsset aber wieder von oben die 15c addiren, und dannenhero fehlen nur noch so viel c als der Unterscheid zwischen 20 und 15 ist, nemlich 5. Hingegen wenn das Zeichen — ist, als

wenn

wenn ihr — 9d von — 7d abziehen sollet; so müsset ihr — 9d addiren, weil ihr es zuviel abgezogen. Denn ihr soltet 20c — 9d wegnehmen: ihr habet aber 20c gantz weggenommen. Da nun oben 7d fehlen, so heben sich von den 9d, die ihr dazu addiret, 7 auf und bleiben nur noch 2d übrig. Darumb dörffet ihr in diesen Fällen nur allezeit die kleinere von der grösseren abziehen, und zu dem übrigen das widrige Zeichen setzen, nemlich — wenn ihr + habet, und + wenn — ist. Endlich wenn die Zeichen verschieden sind, und ihr sollet Z. E. — 9e von + 8e abziehen; so wisset ihr aus dem vorhergehenden, daß die unteren 9e addiret werden müssen, weil ihr zuviel in dem vorhergehenden abgezogen. Und demnach bekommet ihr + 17e. Hingegen wenn ihr Z. E. + 7f von — f subtrahiren sollet; so fehlet euch schon ein f. Wenn ihr nun die 7f unten auch noch wegnehmen sollet, so fehlen euch zusammen 8f. Daher habet ihr in beyden Fällen nur nöthig die Grössen zu addiren, und zu der Summe das Zeichen zu setzen, welches die Grösse hat, davon die Subtraction geschiehet. W. Z. E.

Die 3. Aufgabe.

32. Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu multiplicieren.

Auflösung.

Verrichtet die Multiplication, wie in Zahlen (§. 55. Arithm.), nur mercket: daß einerley Zeichen im Producte + / verschiedene aber — geben.

Exempel.

a + b - d	10 = 8 + 4 - 2
a - b - d	2 = 8 - 4 - 2
- ad - bd + dd	- 16 - 8 + 4
- ab - bb + bd	- 32 - 16 + 8
aa + ab - ad	64 + 32 - - 16
aa - bb - 2 ad + dd	20 = 68 - 48 = 20

Beweiß.

Wenn ihr + durch + multipliciret, so ist klar, daß das Product auch + haben muß. Ingleichen ist nicht schweer zu begreiffen, daß in dem Producte das Zeichen — seyn muß, wenn ihr + durch — multipliciret, weil ihr einen Mangel oder eine Schuld etliche mahl nehmet. Allein wenn — durch — multipliciret wird, scheinet es nicht gleich klar zu seyn, warumb in dem Producte + ist. Mercket demnach, daß, wenn ihr 3 — 2 durch — 2 multipliciren sollet, ihr den Defect — - 2 so vielmahl nehmen sollet, als 3 — 2 Einheiten hat; das ist, 1 mahl. Da ihr nun anfangs 3 mit —

2 mul-

2 multipliciret, so nehmet ihr den Defect 3 mahl und demnach 2 mahl zuviel. Derowegen müsset ihr ihn noch zwey mahl dazu wieder addiren. Und also giebet — 2 mit — 2 zum Producte + 4. W. Z. E.

Zusatz.

33. Wenn ihr — a mit + b multipliciret, so kommet — ab heraus. Derowegen wenn ihr — ab durch + b dividiret, muß — a heraus kommen. Dividiret ihr aber — a b durch — a, so muß + b heraus kommen. Demnach ist klar, daß auch in der Division die Regel gilt: Einerley Zeichen geben im Quotienten +, verschiedene aber —.

Die 4. Aufgabe.

34. Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu dividiren.

Auflösung.

Wenn eine gegebene Grösse durch die andere sich würcklich dividiren lässet; so verfahret wie in Zahlen (§. 59. Arithm.), nur daß ihr die Regel von Veränderungen der Zeichen wohl in acht nehmet (§. 33).

Kan aber die Division nicht würcklich geschehen, so bleibet es bey dem, was oben (§. 24 & seqq.) gesaget worden.

Exempel.

aa - bb - 2 ad + dd (a + b - d
a - b - d) aa - ab - ad

+ ab - bb - ad + dd
a - b - d) + ab - bb - bd

+ bd - ad + dd
a - b - d) - ad + bd + dd

Anmerckung.

35. Weil die Buchstaben nicht wie die Zahlen eine Bedeutung von der Stelle haben / in welcher sie stehen; so dörffet ihr euch hier an keine Ordnung binden / sondern möget den Qvotienten suchen / in welchem Gliede ihr ihn findet: welches auch in dem Subtrahiren des Productes aus dem Divisore in den Qvotienten stat findet.

Die 4. Erklärung

36. **Wenn man eine Grösse durch sich selbst multipliciret / so heisset das Product / welches heraus kommet / die andere Potentz oder Dignität derselben Grösse. Multipliciret ihr die andere Dignität noch einmahl durch die erste / so kommet die dritte Potentz / oder Dignität heraus. Multipliciret ihr ferner die dritte durch die erste / so kommet die vierdte Potentz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr die vierdte durch die erste / so kommet die fünfte Potentz oder Dignität heraus / u. s. w.**

Die

Die erste Stamm-Grösse/so die erste Dignität genennet wird/heisset auch die Wurtzel in Ansehung der anderen / dritten / vierdten / fünften ꝛc. Dignität.

Der 7. willkührliche Satz.

37. Den Grad der Potentz oder Dignität einer Grösse deutet durch eine kleine Zifer / oder / wenn er nicht determiniret ist / durch einen kleinen Buchstaben an/ den ihr oben zur Rechten an denjenigen Buchstaben setzet / wodurch die Grösse benennet wird. Z. E. die andere, dritte, vierdte ꝛc. Dignität von x ist x^2, x^3, x^4, ꝛc. x^m. Diese Zahlen aber werden die Exponenten der Dignitäten genennet.

Der 1. Zusatz.

38. Dannenhero wenn ihr eine Dignität durch eine andere von eben der Wurtzel multipliciren sollet, so dörffet ihr nur ihre Exponenten zusammen addiren.

Exempel.

x^3	y^m	x^m	x^n
x^4	y^n	x^r	x^n
x^7	y^{m+n}	x^{m+r}	x^{2n}

Der 2. Zusatz.

39. Hingegen wenn ihr die Dignität einer Grösse durch eine andere Dignität der-

selben dividiren sollet; so dörffet ihr nur ihre Exponenten von eiander subtrahiren.

Exempel.

$$\frac{x^7}{x^4} \qquad \frac{x^7}{x^3} \qquad \frac{y^{m+n}}{y^n} \qquad \frac{y^n}{y}$$

$$x^3 \qquad x^4 \qquad y^m \qquad y^{m-1}$$

Der 3. Zusatz.

40. Endlich wenn ihr die Dignität einer Grösse zu einer anderen Dignität erheben soliet, so dörffet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der anderen multipliciren. Z. E. Ihr sollet x^3 zu der vierdten Dignität erheben: so multipliciret 3 durch 4, und nehmet x^{12} vor die gesuchte Dignität an.

Anmerckung.

41. Die Ursache ist leicht zu errathen. Denn ihr sollet den Exponenten 3 viermahl zu sich selbst addiren (§. 38). Dieses aber geschiehet / wenn ihr ihn durch 4 multipliciret (§. 23 Arithm.)

Der 4. Zusatz.

42. Folgends wenn ihr aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurtzel ziehen sollet, das ist, diejenige Grösse finden, welche zu einer gewissen Dignität erhoben worden (§. 90. 91. Arithm. & §. 36. Algebr.); so dörffet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der Wurtzel dividiren. Z. E.

Die

Die Wurtzel der vierdten Dignität aus x^{12} ist x^3 die Wurtzel m aus x^n ist $x^{n:m}$.

Anmerckung.

43. Mercket wohl diese Art der Wurtzeln zu zeichnen/ denn ihr werdet inskünftige grossen Vortheil davon haben.

Der 8. wilkührliche Satz.

44. Wenn ihr die Wurtzel aus einer Grösse ziehen sollet / dergleichen sie nicht hat / so setzet folgendes Wurtzel-Zeichen vor sie und über dasselbe den gehörigen Exponenten der Wurtzel: in der Qvadrat-Wurtzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen. Also schreibet ihr die Cubic-Wurtzel von x, $\sqrt[3]{x}$; hingegen die Wurtzel der fünften Dignität von x, schreibet ihr $\sqrt[5]{x}$.

Zusatz.

45. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2:3}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42) so könnet ihr jederzeit eine Formul in die Stelle der anderen setzen, nachdem ihr von dieser oder von jener einen Vortheil haben könnet.

Die 5. Erklärung

46. Dergleichen Grössen / daraus die verlangete Wurtzel nicht genau gezogen werden kan / werden Irrational-Grös-

sen oder / wenn es Zahlen sind / Irrational-Zahlen genennet. Dergleichen sind $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6}$.

Anmerckung.

47. Die Irrational-Grössen können entweder eine Benennung haben / als $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$ / oder verschiedene / als $\sqrt[4]{3}$ und $\sqrt[5]{6}$.

Die 5. Aufgabe.

48. Irrational-Grössen von verschiedener Benennung zu einer Benennung zu bringen.

Auflösung.

Es seyn die gegebenen Irrational-Grössen $x^{n:n}$ und $y^{r:s}$.

Weil der Unterscheid der Benennung in dem Unterscheide der Exponenten $n:m$ und $r:s$ bestehet, hingegen man diese Brüche in andere gleichgültige verwandeln kan, die einerley Benennung haben (§. 81. Arithm.); so ist weiter nichts vonnöthen, als daß ihr die Exponenten unter einerley Benennung bringet, und die dadurch gefundenen Brüche in die Stelle der Exponenten schreibet. So werdet ihr finden, daß $x^{n:m} + y^{r:s} = x^{ns:ms} + y^{mr:ms} = \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

Anmerckung.

49. Auf eben diese Art könnet ihr mit den Irrational-Zahlen verfahren. Z. E. Ihr sollet $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt{3}$ unter

ter eine Benennung bringen. Weil $\overset{3}{V}5 = 5^{1:3}$ und $V3 = 3^{1:2}$ / so findet ihr $5^{1:3} + 3^{1:2} = 5^{2:6} + 3^{3:6} = \overset{6}{V}5^2 + \overset{6}{V}3^3 =$ (wenn ihr die Grössen unter dem Wurtzel-Zeichen würcklich zu ihrer Dignität erhebet) $\overset{6}{V}25 + \overset{6}{V}27$.

Die 6. Aufgabe.

50. Irrational-Grössen auf eine schlechtere Art auszudrucken.

Auflösung.

Weil $\overset{m}{V}a^n x^m = a^{n:m} x^{m:m} = a^{n:m} x = x \overset{m}{V}a^n$ (§. 42); so

1. Dividiret die Grösse unter dem Wurtzel-Zeichen durch eine Dignität von dem Grade, der einerley Exponenten mit der Wurtzel hat, als durch einen Cubum wenn die Irrational-Grösse eine Cubic-Wurtzel ist. Denn wenn dergleichen Division nicht angehet, so könnet ihr auch die Irrational-Grösse nicht schlechter ausdrucken.
2. Den Qvotienten lasset unter dem Wurtzel-Zeichen.
3. Vor das Wurtzel-Zeichen aber setzet die Wurtzel der Dignität, dadurch ihr dividiret.

So ist geschehen, was man verlangete.

Exempel.

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$. Ingleichen
$\sqrt{18} = \sqrt{2.9} = 3\sqrt{2}$. Wiederumb
$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

Der 1. Zusatz.

51. Wenn ihr Irrational-Grössen von einerley Art solcher gestalt reduciret, und es bleibet unter dem Wurtzel-Zeichen einerley Grösse stehen; so verhalten sie sich gegen einander wie die Rational-Grössen vor dem Wurtzel-Zeichen. Z. E. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$. Derowegen ist $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$ (§. 75. Arithm.).

Der 2. Zusatz.

52. Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe finden, ob zwey Irrational-Grössen eine Verhältnis gegen einander haben, die sich durch Rational-Grössen ausdrucken lässet.

Der 3. Zusatz.

53. Weil ihr in solcher Gestalt reducirten Irrational-Grössen den Theil, welcher irrational bleibet, für den Nahmen der Einheit mit Recht haltet (§. 5. & seqq. Arithm.); so könnet ihr die Summe oder den Unterscheid der Irrational-Grössen finden, die unter dem

dem Wurtzel-Zeichen einerley Grössen haben und von einerley Art sind, wenn ihr die Rational-Grössen vor dem Wurtzel-Zeichen zusammen addiret oder von einander subtrahiret. So werdet ihr finden, daß $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Ingleichen $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$.

Der 4. Zusatz.

54. Wenn ihr die Grössen, die zum Theil rational, zum Theil irrational sind, gantz irrational machen sollet; so müsset ihr die Grösse vor dem Wurtzel-Zeichen zu der Dignität erheben, welche der Exponente über dem Wurtzel-Zeichen andeutet, und durch selbige die Grösse unter dem Wurtzel-Zeichen multipliciren. So werdet ihr finden, daß

$5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$ und $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

Die 1. Anmerckung.

55. Damit ihr erfahret / ob eine vorgegebene Zahl sich durch eine Dignität von einem gegebenen Grade dividiren lässet oder nicht; so dörffet ihr sie nur in diejenigen Zahlen zergliedern / durch deren Multiplication sie entstehet. Dieses aber geschiehet / wenn ihr sie mit den eintzelen Zahlen zu dividiren anfanget. Z. E. Ihr sollet auf solche Weise 368 zergliedern / so findet ihr:

2.	184
4.	92
8.	46
16.	23

Die 2. Anmerckung

56. Wem die Irrational-Rechnungen anfangs verdrüßlich fallen/ der kan sie so lange überschlagen/ biß sie unten vorkommen. Er hüte sich aber mit Fleiß/ daß er nicht nach hiesiger Mode für unnütze Grillen halte/ wovon er den Nutzen nicht bald sehen kan. Ihr werdet im folgenden erfahren/ daß ich niemals eine Lehre vortrage/ die nicht ihren gewissen Nutzen hat.

Die 7. Aufgabe.

57. Eine Irrational-Grösse durch eine andere von einerley Art zu multipliciren.

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$ und $\sqrt[m]{b^r} = b^{r:m}$ (§. 42); so ist $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^r} = a^{n:m}\ b^{r:m}$ (§. 20) $= \sqrt[m]{a^n b^r}$ (§. 45) und erhellet hieraus folgende Regel:

1. Multipliciret die Grössen unter dem Wurtzel-Zeichen (a^n und b^r) durch einander.
2. Vor das Product setzet das Wurtzel-Zeichen mit seinem Exponenten ($\sqrt[m]{}$).

So

So werdet ihr finden, daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, und $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$.

Zusatz.

58. Wenn ihr also eine Irrational-Zahl durch eine andere Irrational-Zahl dividiren sollet, so dörffet ihr nur die Zahlen unter dem Wurtzel-Zeichen durch einander dividiren. So werdet ihr finden, daß $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7}$ und $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

Die 8. Aufgabe.

59. Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Auflösung.

1. Unterscheidet mit Fleiß die bekandten Grössen von den unbekandten und benennet jene mit den ersten, diese mit den letzten Buchstaben des Alphabets (§. 15). Wenn die **Benennung** geschehen, so
2. Suchet **eine Gleichung**, daß ihr nemlich eine Sache mit zweyerley Nahmen beleget: denn so müssen die beyden Werthe einander gleich seyn (§. 27. Arithm.) Ihr müsset aber so viel Gleichungen finden, als ihr unbekandte Grössen habet. Wenn es nicht angehet, so ist es ein Zei-

chen,

chen, daß ihr die eine unbekandte Grösse so groß annehmen könnet als ihr wollet. Und pfleget man dergleichen Aufgaben **Underterminirte Aufgaben** zu nennen. Es sind aber die Gleichungen entweder in der Aufgabe selbst angedeutet, oder ihr müsset sie aus ihren Umbständen durch Hülffe derjenigen Lehrsätze suchen, welche von der Gleichheit handeln.

3. Wenn in den Gleichungen bekandte und unbekandte Grössen mit einander vermenget sind, so müsset ihr sie dergestalt einrichten, daß auf einer Seite lauter bekandte, auf der anderen aber nur eine unbekandte stehen bleibet: welches geschiehet, wenn ihr die Grössen, welche subtrahiret sind, durch addiren; welche addiret sind, durch subtrahiren; welche andere multipliciren, durch dividiren; welche andere dividiren, durch multipliciren wegbringet oder auch die Wurtzeln zu ihren Dignitäten erhebet, oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurtzeln ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet (§. 30. 31. 32. 33. Arithm. & §. 36. Algebr.)

Anmerckung.

60. Unerachtet die Einrichtung der gefundenen Gleichung sehr ofte auf beschriebene Weise geschehen kan; so gehet es doch nicht in allen Fällen an. Wir wollen aber erst diese Regeln uns durch Exempel recht bekand machen/ ehe wir zu anderen schreiten. Denn die Algebra lernet man nicht so wohl durch Regeln/ als durch Exempel.

Die

Die 9. Aufgabe.

61. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und ihrem Unterscheide die Grössen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die kleine Grösse $= x$
der Unterscheid $= b$ die grosse $= y$

So ist,

$x + y = a$ (§. 15. Arithm.) $y - x = b$ (§. 18. Arithm.)

$x \quad x$ *subtr.* $\qquad x \quad x$ *add.*

$y = a - x \qquad y = b + x$

demnach

$a - x = b + x$ (§. 28. Arithm.)

$x \quad x$ *add.*

$a = b + 2x$

$b \quad b$ *subtr.*

$a - b = 2x$

2 *div.*

$$\frac{a-b}{2} = x$$

Folgends ist die grössere $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Regel.

Ziehet den Unterscheid der beyden Grös-

sen

sen (b) von der Summe (a) ab. Den Rest dividiret durch zwey; so ist der Qvotient die kleine Grösse (x). Addiret den Unterscheid zu der Summe; so ist die Helffte davon die grosse Grösse (y).

Z. E. Es sey $a=30$, $b=8$, so ist $(a-b):2=(30-8):2=22:2=11$, und $(a+b):2=(30+8):2=38:2=19$.

Anmerckung.

62. Ihr könnet jederzeit aus der letzten Gleichung eine Regel machen / dadurch die Aufgabe in allen vorkommenden Fällen aufgelöset werden kan. Wenn ihr vor die Buchstaben die Nahmen der Sachen setzet / die sie bedeuten / und an stat der Zeichen die Rechnungs-Arten benennet / die sie andeuten: allein der Kürtze halber werde ich inskünftige keine Regel hersetzen / wenn es nicht besondere Umbstände erfordern. Und dieses thue ich umb so viel lieber / weil man die Exempel in Zahlen viel hurtiger auflösen kan / wenn man die Zifern in die Stelle der Buchstaben setzet / als wenn man nach der Regel verfähret. Auch ist zu mercken / daß öffters in den Gleichungen / da noch bekandtes und unbekandtes mit einander vermenget ist / nützliche Lehrsätze enthalten sind. Z. E. Aus der Gleichung $a-b=2x$ ehellet folgender Lehrsatz:

Wenn man von der Summe zweyer Grössen ihren Unterscheid abziehet; so ist der Rest zweymahl so groß als die kleinere.

Die 10. Aufgabe.

63. Eine Zahl zu finden / deren Helffte, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen umb 1 grösser sind als die Zahl selbst.

Auf-

Auflösung.

Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so ist

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$

das ist $(12x + 8x + 6x) : 24 = \frac{26}{24}x = x + 1$ (§. 82. Arithm.)

mult. 24.

$$26x = 24x + 24$$

$24x \quad 24x$ *subtr.*

$$2x = 24$$

2. *div.*

$$x = 12$$

Probe. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13$.

Es ist demnach nicht mehr als die einige Zahl 12, welche diese Eigenschaft hat.

Die 11. Aufgabe.

64. Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die halbe Differentz $= x$

das Product $= b$;

so ist die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + x$, die kleine $\frac{1}{2}a - x$ } §. 61.

Und also $\frac{1}{4}aa-xx=b$

$xx \quad xx$ *add.*

$\frac{1}{4}aa=b+xx$

$b \quad b$ *subtr.*

$\frac{1}{4}aa-b=xx$

rad. extr.

$\sqrt{(\frac{1}{4}aa-b)}=x$

Es sey $a=14$, $b=48$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}aa-b)}=\sqrt{(49-48)}=1$, folgends die grosse Zahl $\frac{1}{2}a+x=7+1=8$ und die kleine $\frac{1}{2}a-x=7-1=6$.

Anmerckung.

65. Es ist an der Benennung öfters viel gelegen. Denn wenn ihr in gegenwärtiger Aufgabe die grosse Zahl x/ die kleine y nennet: kommet ihr auf eine Gleichung/ die ihr noch nicht aufzulösen vermögend seyd. Mercket dabey den Lehrsatz/ den die Gleichung $\frac{1}{4}aa=b+xx$ an die Hand giebt:

Das Qvadrat der halben Summe zweyer Grössen ist gleich dem Producte derselben in einander und dem Qvadrate des halben Unterscheides.

Die 12. Aufgabe.

66. **Es wird gegeben die Summe gleicher Dignitäten zweyer Grössen/ und der Unterscheid selbiger Dignitäten/ ihr sollet die Grössen selbst finden.**

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$ die kleine Grösse $=x$

Der Unterscheid $=b$ die grosse $=y$

so

so ist,

$x + y^m = a$ | $y^m - x^m = b$

$y^m = a - x^m$ | $y^m = b + x^m$

Folgends

$a - x^m = b + x^m$

$a = b + 2x^m$

$a - b = 2x^m$

$(a-b) : 2 = x^m$.

$\sqrt[m]{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)} = x$

Es sey $m = 2$, $a = 97$, $b = 65$; so ist $x = \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)} = \sqrt{(48\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$ und $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65+16)} = \sqrt{81} = 9$.

Die 13. Aufgabe.

67. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß das Product einer jeden in die Quadrat-Wurzel der anderen einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey das eine Product $= a$ die eine Zahl $= x$

das andere $= b$ die andere $= y$

So ist $x \sqrt{y} = a$ | $y \sqrt{x} = b$

$x^2 y = a^2$ | $y^2 x = b^2$

$x = b^2 : y^2$

$x^2 = b^4 : y^4$

Wenn ihr den Werth von x^2 in die erste Gleichung zur Lincken $x^2 y$ setzet, so bekommet ihr

$b^4 y : y^4 = b^4 : y^3 = a^2$

$b^4 = a^2 y^3$

$b^4 : a^2 = y^3$

$\sqrt[3]{(b^4 : a^2)} = y$

Es sey $a = 18$, $b = 12$, so ist $y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)} = \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4$ und $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Die 14. Aufgabe.

68. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und der Differentz ihrer Qvadrate die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die halbe Differentz der Qvadr. $= b$ der Grössen $= y$

So

So ist die eine Grösse $\frac{1}{2}a+y$
Die andere $\frac{1}{2}a-y$
Das Qvadrat der ersten $\frac{1}{4}aa+ay+yy$
Das Qvadrat der 2deren $\frac{1}{4}aa-ay+yy$

Die Differentz $b = 2ay$

$2a$

folgends $b : 2a = y$

Es sey $b = 40$, $a = 10$, so ist $y = 40 : 20 = 2$;
folgends die eine Zahl $\frac{1}{2}a+y = 5+2 = 7$,
die andere $\frac{1}{2}a-y = 5-2 = 3$.

Die 15. Aufgabe

69. Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und der Summe ihrer Qvadrate die beyden Grössen zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$ die eine Grösse $\frac{1}{2}a+y$
Die andere $= b$ die andere $\frac{1}{2}a-y$
So ist das Qvadrat der ersten $\frac{1}{4}aa+ay+yy$
der anderen $\frac{1}{4}aa-ay+yy$

Die Summe $b = \frac{1}{2}aa+2yy$.

Folgends $b-\frac{1}{2}aa = 2yy$

$\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}aa = yy$

$\sqrt{(\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}aa)} = y$

Es sey $a = 10$, $b = 58$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(29-25)} = \sqrt{4} = 2$, folgends $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ und $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Die 16. Aufgabe.

70. Zwey Zahlen zu finden / deren Product einer gegegebenen Zahl gleich ist / das Qvadrat aber der Summe zu dem Qvadrate der Differentz beyder Zahlen eine gegebene Verhältnis hat.

Auflösung

Es sey das Product $= a$ die Summe $= 2x$
die gegebene Verhältnis $= b:c$ der Unterscheid $= 2y$
so ist die eine Zahl $x+y$
die andere $x-y$

und also

$xx - yy = a$ | $b:c = 4x^2 : 4y^2$

$xx = a + y^2$ | $4by^2 = 4cx^2$ (§. 109. *Arith.*)

$by^2 : c = x^2$

Folgends

$a + y^2 = by^2 : c$

$ac + cy^2 = by^2$

$ac = by^2 - cy^2$ — $b-c$ *div.*

$ac : (b-c) = y^2$

$\sqrt{ac} : \sqrt{(b-c)} = y$

Es

Es sey $a=96$, $b:c=25:1$, so ist $y=\sqrt{96}:\sqrt{(25-1)}=\sqrt{4}$ (§. 58) $=2$; und $x=\sqrt{(a+y^2)}=\sqrt{(96+4)}=\sqrt{100}=10$: folgends $x+y=10+2=12$ und $x-y=10-2=8$.

Die 17. Aufgabe.

71. Aus der gegebenen Tage-Reise zweyer Bothen und der Zeit / da der andere dem ersten nachgehet / die Zeit zu finden / in welcher er ihn einholet.

Auflösung.

Es sey die Tage-Reise des ersten $=a$ die gesuchte Zeit $=x$

des anderen $=b$

die gegebene Zeit $=c$

So ist die Reise des ersten in der gegebenen Zeit $=ac$, in der gesuchten $=ax$. Die Reise des anderen in der letzteren Zeit $=bx$. Da nun beyde einen gleichen Weg zurücke geleget; so ist

$$ac+ax=bx$$
$$ax \quad ax \quad \textit{subtr.}$$
$$ac=bx-ax=(b-a)x$$
$$b\text{-}a \textit{ div.}$$
$$ac:(b-a)=x$$

Es sey $a=6$, $b=8$; $c=4$; so ist $x=24:(8-6)=\frac{24}{2}=12$.

Anmerckung.

72. Weil man in Auflösung dieser Aufgabe weder auf den Begriff der Tage-Reise / noch der Bothen siehet; so ist daraus abzunehmen / daß sie bey der Bewegung aller Cörper kan angebracht werden.

Die 18. Aufgabe.

73. Aus der gegebenen Tage-Reise eines Bothens und der Zeit / da er hinweg ist / die Tage-Reise eines anderen Bothens zu bestimmen / der ihn in einer gegebenen Zeit einholen sol.

Auflösung.

Es sey die Tage-Reise des ersten = a des anderen = x

die verflossene Zeit = b
die gegebene Zeit = c

so findet man wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$ab + ac = cx$$

$$\frac{ab}{c} + a = x$$

Es sey $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$; so ist $x = \frac{24}{12} + 6$
$2 + 6 = 8$.

Die 19. Aufgabe.

74. Aus der gegebenen Weite zweyer Oerter von einander / aus welchen zu gleicher Zeit zwey Bothen ausreisen / und der Tage-Reise eines jeden, die Zeit zu bestimmen / da sie einander begegnen.

Auf-

Auflösung.

Es sey die Weite = a die gesuchte Zeit = x
die Tage-Reise des ersten = b
des anderen = c

So ist der Weg des ersten in der zu bestimmenden Zeit = bx, des anderen = cx; folgends weil beyde zusammen die gantze Weite der Oerter von einander durchreiset.

$$bx + cx = a$$
das ist $(b+c)\,x = a$

$$x = a : (b+c)$$

Es sey $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$; so ist $x = 120 : (6+4) = 120 : 10 = 12$. Sie begegnen also einander in dem zwölften Tage.

Die 20. Aufgabe.

75. Aus dem gegebenen Werthe einer Kanne guten Weines zu bestimmen / wie viel man Wasser darunter mischen muß, damit man das Maaß umb einen verlangten geringeren Preiß geben kan.

Auflösung

Der höhere Preiß sey = a das Wasser = x
der geringere = b
das Kannen-Maaß = 1

Da nun der Preiß von 1 = b, so ist der Preiß von $1+x = b+bx$ (§. 113. *Arithm.*) und daher, weil das Wasser x nichts gilt,

$b + bx = a$ (§. 28. *Ar.*)

$bx = a - b$

$x = (a - b) : b$

Es sey $a = 16$, $b = 10$; so ist $x = (16-10) : 10 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Die 21. Aufgabe.

76. Aus dem gegebenen Preisse zweyer Weine von verschiedener Güte zu bestimmen / wieviel man von dem geringern zu dem besseren giessen muß / damit man ihn vor einen verlangten Preiß geben kan.

Auflösung.

Es sey der Preiß des guten	$= a$
des schlechten	$= b$
des vermischten	$= c$
das Kannenmaß	$= 1$

die Gröſſe des schlechten $= x$
so ist sein Preiß $= bx$
die Gröſſe des guten $= 1 - x$
sein Preiß $= a - ax$

Folgends.

$a - ax + bx = c$

$ax \qquad ax$

$a + bx = ax + c$

$bx \qquad bx$

$a = ax - bx + c$

$c \qquad c$

$a - c = ax - bx = (a - b)\,x$

$a-b$ div.

$(a-c) : (a-b) = x$

Es

Es sey $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; so ist $x = (16-12) : (16-10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$. Demnach werden von dem schlechten $\frac{2}{3}$ und von dem guten $\frac{1}{3}$ genommen.

Anmerckung.

77. Die auf besondere Arten der Fälle gerichtete Aufgaben sind schweerer aufzulösen / als die allgemeineren von Zahlen und Grössen: Denn man hat hier viel besondere Umbstände / welche zur Auflösung der Aufgabe nichts beytragen und es ist öfters / sonderlich für Anfänger nicht eine geringe Mühe / wenn man die Aufgaben von den besonderen und zur Auflösung nicht dienenden Umbständen befreyen soll.

Die 6. Erklärung

78. Wenn die Wurtzel einer Dignität oder Potentz aus zwey Theilen bestehet / nennet man sie eine Binomische Wurtzel / als $a+b$. Bestehet sie aus drey Theilen / als $a+b+c$; so heisset sie eine Trinomische Wurtzel: wenn sie aus vier Theilen bestehet / eine Qvadrinomische Wurtzel u. s. w. überhaupt aber nennet man sie eine Polynomische Wurtzel / wenn sie aus mehr als zwey Theilen bestehet.

Die 22. Aufgabe.

79. Die Natur des Qvadrates oder der anderen Dignität einer Binomischen Wurtzel zu finden.

Auflösung.

Ihr verlanget zu wissen / wie das Qva-

drat

drat einer Binomischen Wurtzel entstehen kan, (§. 4. Method. Mathem.). Multipliciret demnach die Binomische Wurtzel $a+b$ durch sich selbst, so wird das Product zeigen, aus was für Theilen das Qvadrat zusammen gesetzet wird, und wie diese Theile des Qvadrates aus den Theilen der Wurtzel entstehen.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +ab+b^2 \\ a^2+ab \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$a^2+2ab+b^2$ Qvadrat der Binomischen Wurtzel.

Lehrsatz.

Das Qvadrat der Binomischen Wurtzel begreiffet in sich die Qvadrate der beyden Theile (a^2 und b^2) und ein Product ($2ab$) aus dem einen Theile zwey mahl genommen ($2a$) in den anderen (b)

Anmerckung.

80. Ihr habet hier auf eine sehr leichte Art den anderen Lehrsatz der Rechen-Kunst (§. 93. *Arithm.*) gefunden/ daraus wir die Ausziehung der Qvadrat-Wurtzel (§. 97. *Arithm.*) hergeleitet. Wenn ihr aber dieselben Regeln vergessen hättet / könte euch dieses allgemeine Exempel $a^2+2ab+b^2$ an stat derselben dienen. Denn ihr sehet / daß/ wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken das darinnen befindliche Qvadrat a^2 abziehet / ihr den ersten Theil der Wurtzel a habet. Wollet ihr nun den anderen

ren finden / so müsset ihr mit a / das ist / mit dem gefundenen Qvotienten zwey mahl genommen / die folgende Zahl $2ab$ dividiren / und hernach nicht allein das Product aus dem Divisore $2a$ in den neuen Qvotienten b / sondern auch das Qvadrat des neuen Qvotienten b^2 subtrahiren.

Zusatz.

81. Setzet $a = a+b$ und $b = c$, so kommet für das Qvadrat der Trinomischen Wurtzel $(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$. Und also müsset ihr zu dem Binomischen Qvadrate noch das Product aus der Summe der beyden Theile der Binomischen Wurtzel zwey mahl genommen in den dritten Theil und das Qvadrat des dritten Theiles addiren. Setzet $a = a+b+c$, und $b = d$, so kommet für das Qvadrat der Qvadrinomischen Wurtzel $(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$. Derowegen müsset ihr zu dem Qvadrate der Trinomischen Wurtzel noch das Product aus der Summe der ersten drey Theile zwey mahl genommen in den vierdten Theil und das Qvadrat des vierdten Theiles addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der Binomischen Formul auch das Qvadrat einer jeden Polynomischen Wurtzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede Polynomische Wurtzel ziehen könnet. Den $(a+b+c+d+e$ &c.$)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2+2(a+b+c+d)e+e^2$ u. s. w. unendlich fort.

Die

Die 7. Erklärung.

82. **Eine unreine Qvadratische Gleichung** (Æquatio quadratica affecta) **wird genennet/ in welcher** $x^2 \mp ax = \pm b^2$.

Die 23. Aufgabe.

83. **Eine unreine Qvadratische Gleichung aufzulösen.**

Auflösung.

Weil $x^2 . ax = . b^2$, so nehmet x für den einen Theil einer Binomischen Wurtzel an. Alsdenn wird a, die bekandte Grösse des anderen Gliedes, der andere Theil der Wurtzel zwey mahl genommen, und also $\frac{1}{2}a$ der andere Theil der Wurtzel seyn: folgends fehlet zu einem vollkommenen Qvadrate das Qvadrat von $\frac{1}{2}a$, nemlich $\frac{1}{4}aa$. Wenn ihr nun solches beyderseits addiret; so lässet sich die Qvadrat-Wurtzel ausziehen und die gegebene Gleichung völlig einrichten.

$$x^2 . ax = . b^2$$
$$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$$

$$x^2 . ax . \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 . b^2$$

$$x . \frac{1}{2}a = V(\tfrac{1}{4}a^2 . b^2)$$

$$x = . \frac{1}{2}a \pm V(\tfrac{1}{4}a^2 . b^2)$$

An-

Anmerckung.

84. Ich habe an stat der Zeichen + und — nur einen Punct gesetzet / damit es nicht nöthig wäre viele Fälle von einander zu unterscheiden. Den Nutzen dieser Regel werdet ihr inskünftige überflüßig sehen. Jetzt vergnüget mich dieselbe durch die beyden folgenden Aufgaben zu erläutern.

Die 24. Aufgabe.

85. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden/ daß ihr Product/ihre Summe und die Differentz ihrer Qvadrate einander gleich sind.

Auflösung.

Es sey die grosse Zahl $= x$
die kleine $= y$, so ist

$$x^2 - y^2 = xy \qquad xy = x + y$$

$$xy - y = x$$

$$y = x : (x - 1)$$

Wenn ihr den Werth y in der ersten Gleichung an seine Stelle setzet, so bekommet ihr

$x^2 - x^2 = x^2$

$x^2 - 2x + 1 \quad x - 1$

$x^2 - 2x + 1$ *mult.*

$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$

x^2 *div.*

$x^4 - 3x^3 = -x^2$

$x^2 - 3x = -1$

$\frac{9}{4} \qquad \frac{9}{4}$ (§. 83).

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$

$x - \frac{3}{2} = V\frac{5}{4}$

$x = \frac{3}{2} + V\frac{5}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}V5$

Ferner weil $xy - x = y$, so ist $x = y : (y - 1)$. Wenn ihr diesen Werth in der ersten Gleichung in die Stelle x setzet, so bekommet ihr

$y^2 - y^2 = y^2$

$y^2 - 2y + 1 \quad y - 1$

und wenn ihr die Reduction wie vorhin anstellet, so findet ihr endlich $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}V5$.

Die 25. Aufgabe.

86. **Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen und ihrer Differenz die Grössen selber zu finden.**

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die gröste Grösse $= x$
die Differentz $= b$ die andere $= y$

So ist,

$a = xy$ $b = x - y$

$a : y = x$ $b + y = x$

Folgends $a : y = b + y$

y

$a = by + y^2$

$\frac{1}{4}b^2$ $\frac{1}{4}b^2$ (§. 83.)

$a + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 + by + y^2$

$\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} = \frac{1}{2}b + y$

$\sqrt{(a + \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}b = y$

Es sey $a = 40$, $b = 3$, so ist $y = \sqrt{(40 + \frac{9}{4})} - \frac{3}{2} = \sqrt{(169 : 4)} - \frac{3}{2} = \frac{13}{2} - \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$, und demnach $x = 8$.

Die 26. Aufgabe.

87. Die Natur der dritten Dignität einer Binomischen Wurtzel zu finden.

Auflösung

Ihr habet nur die andere Dignität,

$a^2+2ab+b^2$

durch die Wurtzel $a+b$ zu multipli-

ciren (§. 32.)

$+a^2b+2ab^2+b^3$

$a^3+2a^2b+ab^2$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Lehrsatz.

Die dritte Dignität einer Binomischen Wurtzel enthält in sich die dritte Dignität der beyden Theile (a^3 und b^3) und ein Product aus dem Qvadrate des ersten Theiles drey mahl genommen ($3a^2$) in den anderen (b), nebst noch einem anderen Producte aus dem ersten Theile drey mahl genommen ($3a$) in das Qvadrat des anderen Theiles (b^2).

Die 1. Anmerckung

88. Ihr habet hier abermahls auf eine sehr leichte Art den 3 Lehrsatz der Rechen-Kunst (§. 99. Arithm.) gefunden / daraus die Ausziehung der Cubic-Wurtzel hergeleitet worden (§. 103. Arithm.) Wenn ihr aber die dort gegebenen Regeln vergessen hättet/könnte euch das allgemeine Exempel $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ an deren stat dienen. Denn ihr sehet / daß / wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken / die daselbst befindliche dritte Dignität a^3 abziehet / ihr den ersten Theil der Wurtzel a habet. Wenn ihr nun aus den übrigen Gliedern den anderen Theil finden wollet / müsset ihr das erste zur Lincken $3a^2b$ durch das Qvadrat des ersten drey mahl genommen ($3a^2$) dividiren und hernach nicht allein das Product aus diesem Divisore ($3a^2$) in den neuen Qvotienten (b) / sondern auch das Product aus dem Qvadrate des neuen Qvotientens (b^2) in den vorhergehen-

den

den dreymahl genommen ($3a$) und endlich die dritte Dignität des neuen Qvotientens (b^3) abziehen.

Zusatz.

89. Setzet $a = a+b$ und $b = c$, so kommet für die dritte Dignität der Trinomischen Wurtzel $a+b+c$ heraus $(a+b)^3+3(a+b)^2 c+3(a+b)c^2+c^3$, und also müsset ihr zu der Dignität der Binomischen Wurtzel noch das Product aus dem Qvadrate der Binomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b)^2$ in den dritten Theil (c), das Product aus der Binomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b)$ in das Qvadrat des dritten Theiles (c^2) und die dritte Dignität desselben Theiles (c^3) addiren. Setzet $a = a+b+c$ und $b = d$, so ist die 3te Dignität der Qvadrinomischen Wurtzel $(a+b+c)^3+3(a+b+c)^2 d+3(a+b+c)d^2+d^3$; folgends müsset ihr noch zu der Dignität der Trinomischen Wurtzel $(a+b+c)^3$ das Product aus dem Qvadrate der Trinomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b+c)^2$ in den vierdten Theil d, das Product aus der Trinomischen Wurtzel dreymahl genommen $3(a+b+c)$ in das Qvadrat des vierdten Theiles d^2 und die dritte Dignität des vierdten Theiles d^3 addiren. Solcher gestalt sehet ihr, daß ihr nach der Binomischen Regel auch die dritte Dignität einer jeden Polynomischen Wurtzel finden, ingleichen aus

einer gegebenen Zahl eine jede Polynomische Cubic-Wurtzel ziehen könnet. Den $(a+b+c+d+e$ &c.$)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3+3(a+b+c+d)^2e+3(a+b+c+d)e^2+e^3$ u. s. w. unendlich fort.

Die 2. Anmerckung.

90. Auf eben solche Weise könnet ihr für die höheren Dignitäten Regeln finden. Und unerachtet ich in der folgenden Aufgabe zeigen werde / wie ihr an stat unendlicher Regeln für unendliche Dignitäten / zu denen eine Grösse erhoben werden kan / eine einige finden könnet; so wird euch die Mühe doch nicht verdrüssen / wenn ihr auf gleiche Art die Natur der vierdten / fünften / sechsten Dignität u. s. w. untersuchet. Denn diese Untersuchung selbst wird euch dienen die allgemeine Regel zu erfinden.

Die 27. Aufgabe.

91. Eine allgemeine Regel zu finden / nach welcher jede Binomische Wurtzel zu jeder verlangeten Dignität erhoben werden kan.

Auflösung.

Wenn ihr die Binomische Wurtzel nach und nach zu ihren Dignitäten erhebet, wie beygefügte Taffel ausweiset.

$1a$	$1b$								
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$							
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$						
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$					
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$				
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$			
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$		
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$	
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

so werdet ihr wahrnehmen, daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusammen gesetzet ist, und diese Producte durch verschiedene Zahlen multipliciret werden. Es entstehen aber diese Producte wenn ihr jeden Theil der Wurtzel zu allen niedrigeren Dignitäten als die gegebene ist, erhebet, und sie verkehret in einander multipliciret. Z.E. in der sechsten Dignität sind alle Dignitäten von 1 bis zu der sechsten der beyden Theile $a^6 . a^5 . a^4 . a^3 . a^2 . a . 1$. und $1 . b . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6$. Multipliciret die erste Reihe in die andere, so bekommet ihr $a^6 + a^5 b + a^4 b^2 + a^3 b^3 + a^2 b^4 + a b^5 + b^6$, das ist, alle Producte, woraus die sechste Dignität bestehet, ausser denen Zahlen, welche sie multiplicirren, und nach dem Exempel des Oughtred (Clavis Mathematicæ c. 12. §. 6. p. m. 38.) sonderlich von denen Engelländern Unciæ genennet werden. Derowegen wenn der Exponente m ist, so sind die Producte $a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + a^{m-3} b^3 + a^{m-4} b^4 + a^{m-5} b^5 + a^{m-6} b^6$ u. s. w. unendlich fort.

Die Unzen.

1 + 1
1 + 2 + 1
1 + 3 + 3 + 1
1 + 4 + 6 + 4 + 1
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1
1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 &c.

wer-

werden gefunden, wenn ihr die Exponenten der Dignitäten, die in einander multiplicirt werden, unter einander schreibet und den Bruch aus den zwey ersten Zahlen für die Untze des anderen Gliedes, den Bruch aus den beyden ersten oberen und unteren Zahlen zur Untze des dritten Gliedes nehmet ꝛc. Z. E. Es sollen die Untzen für die sechste Dignität gefunden werden: so schreibet die angeführten Exponenten dergestalt untereinander:

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6

Alsdenn ist $\frac{6}{1} = 6$ die Untze des anderen Gliedes, $\frac{6.5}{1.2} = 15$ die Untze des dritten, $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ die Untze des vierdten, $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$ die Untze des fünfften, $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6$ die Untze des sechsten, und endlich $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1$ die Untze des letzten Gliedes.

Auf eben solche Art werden die Untzen gefunden, wenn die Exponenten undeterminiret sind. Man schreibet sie nemlich dergestalt untereinander:

$m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.$ &c.
1. 2. 3. 4. 5. 6

und nimmet $\frac{m}{1}$ für die Untze des anderen Gliedes; $\frac{m.m-1}{1.2.}$ für die Untze des dritten, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.}$ für die Untze des vierdten, $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$ für die Untze des fünfften, $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5.}$ für die Untze des sechsten, $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6.}$ für die Untze des siebenden &c.

Wenn ihr nun diese Uncias in die oben gefundene Producte multipliciret; so bekommet ihr für die Dignität m von $a+b$.

$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4}b^4 + \frac{m.m-1}{1.2.} \cdot \frac{m-2.m-3.m-4}{3.4.5.}$

$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.}{1.2.3.4.5.} a^{m-5}b^5 + \frac{m-5}{6} a^{m-6}b^6$ &c.

Das

Das ist, weil $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a^2$, $a^{m-3} = a^m : a^3$, $a^{m-4} = a^m : a^4$ &c. (§. 39),

$$a^m + \frac{m}{1}a^m b + \frac{m.m-1}{1.2}a^m b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^m b^3$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^m b^4 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$$
$$\frac{m-4}{5}a^m b^5 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}$$
$$a^m b^6 \text{ &c.}$$
$$a^6$$

Wenn ihr nun ferner $a = P$ und $b : a = Q$, das erste Glied $= A$, das andere $= B$; das dritte $= C$, das vierdte $= D$, das fünfte $= E$ u. s. w. setzet; so findet ihr endlich $(P+PQ)^m = P^m + m\,AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}FQ$ u. s. w. unendlich fort.

Also habet ihr eine allgemeine Regel gefunden, nach welcher ihr eine jede Binomische Wurtzel zu einer jeden verlangeten Dignität erheben könnet.

Die 1. Anmerckung.

92. Ihr verlanget die vierdte Dignität von 18 oder

10+8, so ist $m = 4$, $P = 10$, $Q = 8:10 = 4:5$,
folgends $P^m = 10^4 = 10000 = A$

m $AQ = 4.\ 10000.\ \frac{4}{5} = 32000 = B$
$m-1$ $BQ = \frac{3}{2}.\ 32000.\ \frac{4}{5} = 38400 = C$
2
$m-2$ $CQ = \frac{2}{3}.\ 38400.\ \frac{4}{5} = 20480 = D$
3
$m-3$ $DQ = \frac{1}{4}.\ 20480.\ \frac{4}{5} = 4096 = E$
4
$m-4$ $EQ = 0.\ 4096.\ \frac{4}{5} = 0 = F$
5

10000 = A
32000 = B
38400 = C
20480 = D
4096 = E

104976 vierdte Dignität von 18.

Die 2. Anmerckung.

93. Ihr werdet vielleicht meinen / daß man mit leichter Mühe durch das gewöhnliche multipliciren die gegebenen Zahlen zu der verlangten Dignität erheben kan / und dannenhero die gefundene allgemeine Regel für unnütze halten. Allein ihr sollet zu seiner Zeit erfahren / wie sehr ihr euch in eurer Meinung betrogen / wenn ihr ihren vielfältigen Nutzen verspühren werdet. Jetzt erinnere ich nur dieses. Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurtzel ausziehen sollet; so könnet ihr die Regeln / nach welchen solches geschiehet / wie für die Qvadrat- und Cubic-Wurtzel (§. 80. 88) finden / wenn ihr durch die gefundene allgemeine Regel die Binamische Wur-

Wurtzel $a+b$ zu der gehörigen Dignität erhebet. Z. E. Ihr sollet die Wurtzel der fünften Dignität aus einer gegebenen Zahl ziehen: so dörffet ihr nur $a+b$ zu der fünften Dignität erheben. Das allgemeine Exempel wird euch die Regel bald an die Hand geben.

Die 3. Anmerckung.

94. Gleichwie ihr aber schon oben gesehen habet / daß die Regeln für die Binomische Wurtzeln auch dienen eine Polynomische Wurtzel zu der anderen und dritten Dignität zu erheben (§. 81. 89); alsso gehet es auch an / daß ihr nach dieser allgemeinen Regel / die zwar eigentlich auch nur auf Binomische Wurtzeln gerichtet ist / auf eine gleiche Weise eine jede Polynomische Wurtzel zu der verlangten Dignität erhebet: wie aus folgender Aufgabe zu ersehen.

Die 28. Aufgabe.

95. Eine allgemeine Regel zu finden aus allen Dignitäten eine verlangte Binomische Wurtzel zu ziehen.

Auflösung.

Weil $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 42), so ist das Wurtzel-Ausziehen so viel als eine Grösse zu einer Dignität erheben, die zu ihrem Exponenten eine gebrochene Zahl hat. Derowegen wenn ihr in der vorhin gefundenen Regel an stat des Exponenten m den Exponenten $m:n$ setzet, so bekommet ihr eine allgemeine Regel, nach welcher so wohl jede Grösse zu einer verlangten Dignität erhoben, als aus derselben eine verlangte Wurtzel gezogen werden kan. Es ist aber folgende:

$\sqrt[n]{}$

$$\sqrt[n]{(P+PQ)^m} = P^{m:n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ + \frac{m-5n}{6n}FQ \text{ u. s. w. unendlich fort.}$$

Die 1. Anmerckung.

96. Diese sehr nützliche Regel hat der vortrefliche Geometra in Engelland *Isaac Newton* zuerst gefunden / wiewohl auf eine andere Art / als ich gewiesen habe: wie solches aus dem Briefe erhellet / den er A. 1676 an den unvergleichlichen Mathematicum und Polyhistorem, den Herrn Reichs-Hoff-Rath von Leibnitz / geschrieben und Wallisius mit in den dritten Theil seiner mathematischen Wercke f. 622 drucken lassen. Es ist aber diese Regel einerley mit der vorigen. Denn wie ihr $m:n$ durch gantze Zahlen in dem Gebrauche derselben erklären könnet / wenn ihr $n = 1$ setzet; so könnet ihr auch in der vorigen Regel m durch einen Bruch erklären / wenn eine Wurtzel ausgezogen werden sol / z. E. ihr setzet $m = \frac{1}{2}$ / wenn ihr die Qvadrat-Wurtzel verlanget; $m = \frac{1}{3}$ / wenn ihr die Cubic-Wurtzel suchet u. s. w.

Die 2 Anmerckung

97. Damit ihr aber den Gebrauch der Regel deutlich erkennen möget; so will ich selbige mit einem Exempel erläutern. Ihr verlanget zu wissen die Qvadrat-Wurtzel aus $aa - x^2$: so ist $m = 1$, $n = 2$, $P = a^2$, $Q = -x^2 : a^2$, folgends:

$P^{m:n} = a = A$

$+\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2}a. - x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$

$+\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$

$+\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1}{6} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^6}{16a^5} = D$

$+\frac{m-3n}{4n} DQ = \frac{1}{8} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$

$+\frac{m-4n}{5n} EQ = \frac{1}{10} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c.

Demnach ist $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ u. s. w. unendlich fort.

Die 3. Anmerckung.

98. Wenn man aus der gegebenen Grösse eine vollkommene Wurtzel haben kan/ so ist die Zahl der Glieder allezeit endlich. Hingegen wo dergleichen nicht vorhanden/ so gehen die Glieder unendlich fort. Man nimmet aber von denselben so viele in jedem Falle als nöthig ist/ biß nemlich durch Weglassung der übrigen kein mercklicher Fehler entstehet.

Die 4. Anmerckung.

99. Wenn einem die 27. oder 28. Aufgabe zu schwer vorkommen solte/ der kan sie so lange bey Seite setzen/ biß wir unten ihrer nöthig haben werden.

Die

Die 29. Aufgabe.

100. Die Differentz zweyer Qvadrate zu finden / derer Wurtzeln umb 1 unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurtzel n, die andere $n+1$, so ist das Qvadrat der grossen n^2+2n+1
der kleinen n^2.

die Differentz $2n+1$

Weil nun jede Zahl zweymahl genommen eine gerade Zahl bringet und eine gerade Zahl von einer ungeraden umb 1 unterschieden ist; so ist die Differentz zweyer Qvadrate, derer Wurtzeln umb 1 unterschieden sind, eine ungerade Zahl, die der Summe der Wurtzeln gleich ist. Es seyn die Wurtzeln 8 und 9, so ist die Differentz ihrer Qvadrate $17 = 8+9$.

Der 1. Zusatz

101. Also kan man durch blosse Addition die Qvadrat-Zahlen aller Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung finden. Man darf nemlich nur zu dem vorhergehenden Qvadrate beständig seine und zugleich die folgende Wurtzel addiren.

Der 2. Zusatz.

102. Die Qvadrat-Zahlen werden auch

in

in ihrer Ordnung nach einander gefunden, wenn man die ungeraden Zahlen in ihrer Ordnung zu einander addiret.

Wurtzeln.	ungerade Zahlen.	Quad. Zahl.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

Die 30. Aufgabe.

103. Den Unterscheid zweyer Cubic-Zahlen zu finden / derer Wurtzeln umb 1. von einander unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurtzel $= n$ die andere $n+1$

so ist

die grosse Cubic-Zahl n^3+3n^2+3n+1

die kleine n^3

der Unterscheid $3n^2+3n+1$

Das

Das ist, $n^2+2n+1+2n^2+n = (n+1)^2+2n^2+n$. Also ist der verlangte Unterscheid die Summe aus dem Qvadrate der grossen Wurtzel und dem Qvadrate der kleinen zweymahl genommen, und der kleinen Wurtzel. Z. E. Es seyn die Wurtzeln 8 und 9; so ist der Unterscheid ihrer Cubic-Zahlen $217 = 81+128+8 = 9^2+2.8^2+8$.

Zusatz.

104. Wenn man also die Qvadrat-Zahlen in ihrer Ordnung nach einander gefunden (§. 101. 102); so kan man daraus die Cubic-Zahlen durch blosse Addition finden.

Die 31. Aufgabe.

105. Zu finden / was für eine Zahl heraus kommet / wenn man eine gerade Zahl zu einer ungeraden addiret / oder sie von einander abziehet / oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Weil eine gerade Zahl sich in zwey gleiche Theile theilen lässet, eine ungerade aber umb 1 von einer geraden unterschieden ist; so nennet die gerade Zahl $2x$, die ungerade $2y+1$

$2y+1$	$2y+1$	$2y+1$
$2x$	$2x$	$2x$
Summe $2x+2y+1$	Differ. $2y+1-2x$	Prod. $4xy+2x$

Die

Die Summe und Differentz sind ungerade Zahlen, das Product ist eine gerade Zahl. Denn dieses lässet sich halbiren, jene nicht.

Die 32. Aufgabe.

106. Zu finden / was für eine Zahl herauskommet / wenn man eine gerade Zahl zu einer geraden addiret / oder sie von einander subtrahiret / oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine gerade Zahl $2x$, die andere $2y$. So ist die Summe $2x+2y$, die Differentz $2x-2y$, das Product $4xy$ und also sind alle drey gerade Zahlen, denn sie lassen sich halbiren.

Die 33. Aufgabe.

107. Zu finden / was für Zahlen herauskommen / wenn ihr eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addiret / oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine ungerade Zahl $2x+1$, die andere $2y+1$.

$2x+1$	$2x+1$
$2y+1$	$2y+1$
Summe $= 2x+2y+2$	Differ. $= 2x-2y$

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2y+1 \\ \hline +2x+1 \\ 4xy+2y \\ \hline \text{Prod.} = 4xy+2x+2y+1 \end{array}$$

Die Summe und Differentz lassen sich halbiren, sind also gerade Zahlen. Das Product lässet sich nicht halbiren: ist also eine ungerade Zahl.

Die 34. Aufgabe.

108. Zufinden, was für Zahlen heraus kommen/ wenn ihr lauter gerade Zahlen/ oder eine gerade Anzahl ungerader Zahlen/ oder auch eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen addiret.

Auflösung.

Es seyn die gerade Zahlen $2x$, $2y$, $2z$, $2t$ u. s. w. so ist die Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. das ist $2(x+y+z+t$ u. s. w.) also eine gerade Zahl. Derowegen die Summe von lauter geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m$, das ist $2(x+y+z+t$ u. s. w.$)+2m$, folgends eine gerade Zahl.

Des

Derowegen Wenn lauter ungerade Zahlen in gerader Anzahl zusammen addiret werden / so ist die Summe eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen abermahls $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m+1$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m+1$, das ist, $2(x+y+z+t$ u. s. w.$)+2m+1$, folgends eine ungerade Zahl. Derowegen wenn lauter ungerade Zahlen in ungerader Anzahl zusammen addiret werden / so ist die Summe eine ungerade Zahl.

Anmerckung.

109. Wenn diese Aufgaben gleich sonst keinen Nutzen hätten / so solten sie euch doch angenehm seyn / weil sie euch eine neue Maxime der Benennung an die Hand geben. Ihr werdet aber auch bey anderen Gelegenheiten ihren Nutzen verspüren. Z. E. wenn einer verlangete / ihr soltet 20 in 5 ungerade Zahlen theilen; so werdet ihr bald sehen / daß dieses unmöglich sey / weil ungerade Zahlen in ungerader Anzahl eine ungerade Zahl bringen / wenn sie summiret werden.

Die 35. Aufgabe.

110. Zu finden / was für eine Dignität herauskommet / wenn man eine Qvadrat- oder Cubic-Zahl durch sich selbst multipliciret.

Auflösung.

Es sey die Qvadrat-Zahl x^2, die Cubic-Zahl x^3. Multipliciret jede durch sich selbst, so kommet in dem ersten Falle x^4, in dem anderen x^6, weil der Exponente 4 sich durch 2,

der Exponente 6 aber so wohl durch 2 als durch 3 sich dividiren lässet; so ist x^4 ein Quadrat, x^6 aber zugleich eine Quadrat- und eine Cubic-Zahl. Derowegen wenn eine Quadrat-Zahl durch sich selbst multipliciret wird / so ist das Product eine vierdte Dignität und Quadrat-Zahl: Wenn eine Cubic-Zahl durch sich selbst multipliciret wird / so ist das Product zugleich eine Quadrat- und auch eine Cubic-Zahl.

Anmerckung.

111. Auf diese Manier könnet ihr noch gar viel andere dergleichen Lehrsätze finden / wenn ihr dieselben nöthig habet.

Die 36. Aufgabe.

112. Zu finden / wie groß in einer arithmetischen Progreßion die Summe der beyden äussersten Glieder sey.

Auflösung.

Es sey das erste Glied a, der Unterscheid der Glieder d, so ist die Progreßion (§. 69. Arithm.)

$$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d$$

$$\frac{a+4d}{2a+5d} = \frac{a+2d}{2a+5d} = \frac{a}{2a+5d}$$

$$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d$$

$$\frac{a+3d}{2a+4d} = \frac{2}{2a+4d} = \frac{a}{2a+4d}$$

Lehrs

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Progreßion ist die Summe der beyden äußersten Glieder der Summe jeder zweyen Glieder gleich / die von den äußersten gleich weit abstehen / ingleichen zweymahl so groß als das mittlere / wenn die Glieder an der Zahl ungleich sind.

Z. E. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21
12 9 6 3

24 = 24 = 24 = 24

Der 1. Zusatz.

113. Derowegen bekommet ihr die Summe der gantzen Progreßion, wenn ihr die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder multipliciret. Es sey das erste Glied a, die Differentz d, die Zahl der Glieder n, so ist das letzt Glied $a + (n-1)d$, folgends die Summe der Progreßion $(2a+(n-1)d)\frac{1}{2}n = an + (n^2 - n)\frac{1}{2}d$. Es sey Z. E. $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$, so ist die Summe der Progreßion $21 + (49 - 7)\frac{3}{2} = 21 + 42 \cdot \frac{3}{2} = 21 + 21 \cdot 3 = 21 + 63 = 84$.

Der 2. Zusatz.

114. Ihr könnet demnach die Summe einer arithmetischen Progreßion finden, wenn

euch das erste Glied, der Unterscheid und die Zahl der Glieder gegeben sind.

Der 3. Zusatz.

115. Es sey $a = 1$, $d = 2$, die Zahl der Glieder $= n$; so ist die Summe der Progreßion $n + n^2 - n = n^2$: woraus von neuem erhellet, daß die Quadrat-Zahlen herauskommen, wenn man die ungeraden Zahlen, das ist, die Glieder in der arithmetischen Progreßion 1. 3. 5. 7. 9. 11. u. s. w. zusammen addiret.

Der 4. Zusatz.

116. Es sey $a = \frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied sey dem halben Unterschiede der Glieder gleich; so ist die Summe der Progression $an + an^2 - an = an^2$.

Der 5. Zusatz.

117. Es sey $a = n = \frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied, die Zahl und der halbe Unterschied der Glieder sind einander gleich; so ist die Summe $n^2 + n^3 - n^2 = n^3$, das ist, der Cubus von dem ersten Gliede. Z. E. $a = n = \frac{1}{2}d = 8$, oder die Progreßion 8 24. 40. 56. 72. 88. 104. 120.; so ist die Summe 512. oder die Cubic-Zahl von 8.

Anmerckung.

118. Hieraus erhellet / wie man aus allgemeinen Lehrsätzen besondere finden kan.

Die

Die 37. Aufgabe.

119. Aus dem ersten und letzten Gliede einer arithmetischen Progreßion und dem Unterscheide der Glieder / ihre Zahl und die Summe der Progreßion zufinden.

Auflösung

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$
das letzte $= b$ die Summe $= y$
der Unterscheid $= d$
So ist (§. 113)

$$b = a + dx - d$$
$$b - a + d = dx$$
$$\frac{b - a + d}{d} = x$$
$$b - a + 1 = x$$

$$y = \tfrac{1}{2}(b+a)x$$
$$y = \frac{(b+a)(b-a)}{2d} + \tfrac{1}{2}(b+a)$$
$$= \frac{b^2 - a^2}{2d} + \frac{b+a}{2}$$

Es sey z. E. $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$, so ist $x = (17-2):3+1 = 15:3+1 = 6$ und $y = \frac{1}{2}(17+2)+(289-4):6 = 9\frac{1}{2} + 28\frac{5}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

Die 38. Aufgabe.

120. Aus dem ersten Gliede / dem Unterscheide der Glieder / und der Summe einer arithmetischen Progreßion die Zahl der Glieder und das letzte Glied zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$

der Unterscheid d das letzte Glied $= y$

die Summe $= c$

So ist (§. 113)

$\frac{1}{2}x(a+y) = c$ $a+dx-d = y$

2

$ax+xy = 2c$

$xy = 2c-ax$

x

$y = (2c-ax) : x$ folgends

$(2c-ax) : x = a+dx-d$

x

$2c-ax = dx^2+ax-dx$

d

$2c : d = x^2+\frac{(2a-d)x}{d}$

Setzet $(2a-d) : d = m$, so ist

$2c : d = x^2+mx$

$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$ (§. 83).

$\frac{1}{4}m^2+2c : d = x^2+mx+\frac{1}{4}m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c : d)} = x+\frac{1}{2}m$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c : d)}-\frac{1}{2}m = x$

Es sey $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$, so ist $m = (4-3) : 3 = \frac{1}{3}$, folgends $x = V(\frac{1}{36} + 114\frac{4}{3}) - \frac{1}{6}$ $= V\frac{13602}{36} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$ Ferner ist $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

Die 39. Aufgabe.

121. Aus dem ersten und letzten Glieds und der Summe einer arithmetischen Progreßion die Zahl und den Unterscheid der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$
das letzte $= b$ der Unterscheid $= y$
die Summe $= c$

So ist (§. 113)

$\frac{1}{2}x(a+b) = c$

$x(a+b) = 2c$

$x = 2c : (a+b)$

$a + xy - y = b$

$xy - y = b - a$

$xy = b + y - a$

$x = (b + y - a) : y$

Folgends

$$2c : (a+b) = (b+y-a) : y$$

$$2cy : (a+b) = b+y-a \quad \text{(} \cdot a+b\text{)}$$

$$2cy = ab+ay-a^2+b^2+by-ab$$

$$2cy-ay-by = b^2-a^2 \quad \text{(} : 2c-a-b\text{)}$$

$$y = (b^2-a^2) : (2c-a-b)$$

Es sey $a = 2$, $b = 17$, $c = 57$, so ist $x = 114 : (2+17) = 114 : 19 = 6$, und $y = (289-4) : (114-19) = 285 : 95 = 3$.

Die 40. Aufgabe.

122. Aus dem Unterscheide und der Zahl der Glieder, ingleichen der Summe einer arithmetischen Progreßion / das erste und letzte Glied / und folgends alle übrigen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Glieder $= n$ das erste Glied $= x$
der Unterscheid $= d$ das letzte $= y$
die Summe $= c$

So ist (§. 113)

$\frac{1}{2}n(x+y) = c \qquad y = x+nd-d$

$n(x+y) = 2c$

$x+y = 2c:n$

$y = 2c:n-x$ Folgends

$2c:n-x = x+nd-d$

$2c:n+d-nd = 2x$

$c:n+\frac{1}{2}(d-nd) = x$

Es sey $n = 6, d = 3, c = 57$, so ist $x = \frac{57}{6}+\frac{3}{2}-\frac{18}{6} = \frac{57}{6}+\frac{9}{6}-9 = \frac{66}{6}-9 = 11-9 =$ 2 und $y = \frac{114}{6}-2 = 19-2 = 17$.

Die 41. Aufgabe.

123. Aus dem Unterscheide der Glieder/ dem letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progreßion das erste Glied und die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das letzte Glied $= b$ das erste Glied $= x$

der Unterscheid $= d$ die Zahl der Glieder $= y$

die Summe $= c$

So

So ist (§. 113)

$\frac{\frac{1}{2}y(x+b) = c}{y(x+b) = 2c} \quad \frac{b = x+dy-d}{b+d-dy = x}$

$x+b = 2c : y$

$x = \frac{2c-b}{y}$

Folgends

$\frac{\frac{2c-b}{y} = b+a-dy}{2c-by = by+dy-dy^2}$

$dy^2-2by-dy = -2c$

$y^2-(\frac{2b-d}{d})y = -2c : a$

Setzet $(2b+d) : d = m$, so ist

$y^2-my = -2c : d$

$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$ (§. 83)

$y^2-my+\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2-2c : d$

$\frac{1}{2}m-y$ oder $y-\frac{1}{2}m = V\ (\frac{1}{4}m^2-2c : d)$

$y = \frac{1}{2}m \pm V\ (\frac{1}{4}m^2-2c : d)$

Es sey $b = 17$, $d = 3$, $c = 57$, so ist $m = (34+3) : 3 = 37 : 3$ und $\frac{1}{2}m = 37 : 6$, folgends

$y = 37/6 - V(1369 - 1368) = 37/6 - V\,1/36 = 36/6$

$-1/6 = 36/6 = 6$, und $x = 114/6 - 17 = 19 - 17 = 2$

Die 42. Aufgabe.

124. Aus der Summe einer arithmetischen Progreßion / der Zahl der Glieder und dem Producte aus dem ersten Gliede in das letzte / die Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ das erste Glied $= x$
die Zahl der Glieder $= n$ das letzte $= y$
die Summe $= c$

So ist

$\frac{1}{2}n(x+y) = c$ (§. 113) 2 $a = xy$ x

$n(x+y) = 2c$ n

$x+y = 2c:n$

$y = \frac{2c-x}{n}$ folgends

$a:x = 2c:n-x$ n

$a = 2cx - x^2$

$x^2 - 2cx = -a$

$$\frac{c^2 : n^2 \qquad c^2 : n^2}{x^2 - 2c\,x + c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a}$$

$$\frac{}{c : n - x = \sqrt{\left(\frac{c^2}{n^2} - a\right)}}$$

$$\frac{}{\frac{c}{n} - \sqrt{\left(\frac{c^2}{n^2} - a\right)} = x}$$

Es sey $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$, so ist $x =$

$$\frac{57}{6} - \sqrt{\left(\frac{3249}{36} - 34\right)} = \frac{57}{6} - \sqrt{\left(\frac{3249 - 1224}{36}\right)} =$$

$$5\tfrac{7}{6} - \sqrt{(2025 : 36)} = \frac{57}{6} - \frac{45}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

Die 8. Erklärung.

125. **Wenn man etliche Glieder von einer arithmetischen Progreßion / die sich von 1 anfänget / zu einander addiret; so heisset die Summe eine Polygonal-Zahl** (*Nemerus Polygonus*).

Die 9. Erklärung.

126. **Insbesondere heisset es eine Triangular-Zahl / wenn die Differentz der Glieder in der Progreßion 1 ist; eine Quadrat-Zahl / wenn sie 2 ist: eine Pentagonal-**

nal-Zahl, wenn sie 3 ist: eine Hexago-
nal-Zahl / wenn sie 4 ist u. s. w.

Arithm. Progr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
Triang. Zahlen	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36
Arithm. Progr.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15
Quadr. Zahlen	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64
Arithm. Progr.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22
Pentagonal-Zahl	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	92
Arithm. Progr.	1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.	29
Hexagon. Zahl.	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.	120

Anmerckung.

127. Ihr werdet inskünftige erfahren / daß es nicht ohne Nutzen sey / wenn man allerhand Progreßionen der Zahlen summiren lernet. Zu dem Ende wollen wir auch untersuchen / wie man die Polygonal-Zahlen summiren kan.

Die 10. Erklärung.

128. **Die Seite der Polygonal-Zahl heisset die Zahl der Glieder / welche von der Progreßion summiret worden / damit dieselbe entstanden.**

Anmerckung.

129. Die Polygonal-Zahlen haben ihren Nahmen von den regulären Figuren / darein sich die Einheiten / daraus sie bestehen / versetzen lassen. Es kommen aber in die Seite der Figur jederzeit soviel Einheiten oder Puncte (wodurch sie angedeutet werden) als Glieder von der Progreßion summiret worden / damit man die Polygonal-Zahl bekomme.

Die 11. Erklärung.

130. **Durch die Zahl der Winckel ver-**

ste-

stehen wir diejenige / welche andeutet / wie viel Winckel die Figur hat / von der die Polygonal-Zahl ihren Nahmen bekommet.

Der 1. Zusatz.

131. Also ist die Zahl der Winckel in Trigonal-Zahlen 3; in Quadrat- oder Tetragonal-Zahlen 4; in Pentagonal-Zahlen 5 u. s. w.

Der 2. Zusatz.

132. Da nun in Trigonal-Zahlen der Unterscheid der Glieder 1, in Quadrat-Zahlen 2, in Pentagonal-Zahlen 3 u. s. w. ist; so ist die Zahl der Winckel jederzeit umb 2 gröser als der Unterscheid der Glieder in der Progreßion, durch deren Summirung die Polygonal-Zahlen entstehen.

Die 43. Aufgabe.

133. Aus der gegebenen Seite einer Polygonal-Zahl und der Zahl der Winckel die Polygonal-Zahl zu finden.

Auflösung.

Es sey die Seite = a
Die Zahl der Winckel = n
das erste Glied der Progr. ist = 1 (§. 125)
der Unterscheid der Glieder = $n-2$ (§. 132)
das letzte Glied $1 + (n-2)(a-1)$ (§. 113) = $an - 2a - n + 3$.

das erste Glied	1
Summe des ersten und letzten	$an-2a-n+4$
halbe Zahl der Glieder	$\frac{1}{2}a$ (§. 128).

Polygonal-Zahl $\frac{1}{2}a^2n-a^2-\frac{1}{2}an+2a$ (§. 113) $=$ $\frac{a^2n-2a^2-an+4a}{2}$

Es sey $n=3$, so ist die Trigonal-Zahl $=$ $\frac{(n-2)a^2-a(n-4)}{2}=\frac{1a^2+1a}{2}$.

Es sey $n=4$, so ist die Tetragonal-Zahl $=$ $\frac{2a^2-0a}{2}=a^2$.

Es sey $n=5$, so ist die Pentagonal-Zahl $=$ $\frac{3a^2-1a}{2}$.

Es sey $n=6$, so ist die Hexagonal-Zahl $=$ $\frac{4a^2-2a}{2}=2a^2-a$

Es sey $n=7$, so ist die Heptagonal-Zahl $=$ $\frac{5a^2-3a}{2}$.

Es sey $n=8$, so ist die Octogonal-Zahl $=$ $\frac{6a^2-4a}{2}=3a^2-2a$ u. s. w. unendlich fort.

Nemlich die umb zwey verminderte Zahl der Winckel wird durch das Qvadrat der Seite, und die umb 4 verminderte Zahl der Winckel durch die Seite der Polygonal-Zahl multipliciret; das letzte Product aber von dem ersten abgezogen.

Exempel.

Ihr sollet die sechste Trigonal-Zahl finden. Weil $a = 6$; so ist $\frac{a^2 + a}{2} = \frac{36 + 6}{2} = 18 + 3 = 21$. Wenn ihr die achte Pentagonal-Zahl suchet; so ist $a = 8$, und also $\frac{3a^2 - a}{2} = \frac{3 \cdot 64 - 8}{2} = 3 \cdot 32 - 4 = 96 - 4 = 92$. Wenn ihr die fünfte Hexagonal-Zahl suchet, so ist $a = 5$, und also $2a^2 - a = 50 - 5 = 45$.

Die 44. Aufgabe.

134. Aus der gegebenen Polygonal-Zahl und der Zahl der Winckel die Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey die Polygonal-Zahl $= p$ die Seite
die Zahl der Winckel $= n$ $= x$
So ist der Unterscheid der Glieder $n-2$ (§. 132)
das erste Glied 1 (§. 125)
Derowegen das letzte $1 + (x-1)(n-2)$ (§. 113. 128)

das

das ist $3+nx-2x-n$
das erste Glied 1

Summe des ersten und letzten $4+nx-2x-n$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}x$ (§. 128)

$$2x+\tfrac{1}{2}nx^2=x^2=\tfrac{1}{2}nx$$

Derowegen ist

$$\tfrac{1}{2}nx^2-x^2+2x-\tfrac{1}{2}nx=p$$

$$nx^2-2x^2-nx+4x=2p$$

$$x^2-n+4 \quad 2p$$
$$\overline{n-2}\ x=\overline{n-2}$$

Das ist, wenn $(n-4):(n-2)=m$

$$x^2-mx=2p:(n-2)$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$x^2-mx+\tfrac{1}{4}m^2=\tfrac{1}{4}m^2+2p:(n-2)$$

$$x-\tfrac{1}{2}m=\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2+2p:(n-2))}$$

$$x=\tfrac{1}{2}m+\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2+2p:(n-2))}$$

Das ist, wenn man vor m seinen Werth setzet,

$$x=\frac{n-4}{2n-4}+\sqrt{\left\{\frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16}+\frac{4p}{2n-4}\right\}}=$$

$$\frac{n-4}{2n-4}+\sqrt{(8p(n-2)+(n-4)^2}$$
$$2n-4$$

Es sey $n=3$; so ist $x=\frac{-1+\sqrt{(8p+1)}}{2}$

Es sey $n=4$; so ist $x=\frac{0+\sqrt{(16p+0)}}{4}$

Es sey $n=5$; so ist $x=\frac{1+\sqrt{(24p+1)}}{6}$

Es sey $n=6$; so ist $x=\frac{2+\sqrt{(32p+4)}}{8}$

Es sey $n=7$; so ist $x=\frac{3+\sqrt{(40p+9)}}{10}$

Es sey $n=8$; so ist $x=\frac{4+\sqrt{(48p+16)}}{12}$

u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr diese Polygonal-Zahlen betrachtet, so werdet ihr wahrnehmen, 1. daß überall die Zahl ausser dem Wurtzel-Zeichen, die umb 4 verringerte Zahl der Winckel; und 2. daß die andere Zahl unter dem Wurtzel-Zeichen das Qvadrat von dieser Zahl sey; 3. die erste aber dem Producte aus der Polygonal-Zahl in den Divisorem 4 mahl genommen gleiche und 4. der Divisor die Summe der Zahl ausser dem Wurtzel-Zeichen und der Zahl der Winckel ausmache.

Es sey 21 eine Trigonal-Zahl: ihr sollet die Seite finden, das ist, die wie vieleste sie in ihrer Ordnung ist. Weil $p=21$, so ist die

die verlangte Seite $\frac{-1+\sqrt{(168+1)}}{2}=$

$\frac{1+\sqrt{169}}{2}=\frac{-1+13}{2}=\frac{12}{2}=6$. Es sey p =
45 und zwar eine Hexagonal-Zahl; so ist die verlangte Seite $\frac{2+\sqrt{(32.45+4)}}{8}=$

$\frac{2+\sqrt{1444}}{8}=\frac{2+38}{8}=\frac{40}{8}=5$.

Zusatz.

135. Wenn ihr also nach und nach eine gegebene Zahl in die Stelle von p setzet; so werdet ihr sehen, ob sie mit unter die Polygonal-Zahlen gehöre, und in welche Reihe derselben sie zu setzen sey. Denn sie findet in allen Reihen stat, wo für ihre Seite eine gantze Rational-Zahl heraus kommet. Also wenn euch 21 wäre gegeben worden, würdet ihr gefunden haben, daß es die sechste Trigonal-Zahl sey.

Anmerckung.

136. Ihr dörffet aber nicht weiter versuchen/ ob die gegebene Zahl sich für p setzen lasse/ wenn ihr die Zahl der Winckel gleich wird/ als in dem gegebenen Exempel 21.

Die 45. Aufgabe.

137. Die Grösse des Products der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Proportion zu determiniren.

Auflösung.

Es sey in dem ersten Falle, wenn nur 3 Glieder sind, das erste $= a$, der Exponente $= m$, so ist die Proportion

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a. \quad ma. \quad m^2a \quad \text{(§. 66. 68. Arithm.)}$$

$$\frac{ma}{ma} \qquad \frac{a}{a}$$

$$(ma)^2 = m^2 a^2 \quad \text{(§. 98. Arithm.)}$$

Es sey in dem anderen Falle, wenn 4 Glieder sind, das erste $= a$, der Exponente $= m$, das dritte $= b$, so ist die Proportion

$$a : ma = b : mb \quad \text{(§. 66. Arithm.)}$$

$$\frac{b}{mab} \qquad \frac{a}{mab}$$

Lehrsatz.

Wenn drey Grössen einander geometrisch proportional sind / so ist das Product der beyden äussersten dem Quadrate der mittleren gleich: sind aber vier einander proportional / so ist das Product der äussersten dem Producte der beyden mittleren gleich.

Anmerckung.

138. Von den Zahlen ist dieses schon in der Rechen-Kunst erwiesen worden (§. 109. 110. Arithm.) Wir haben aber in der Geometrie solches mit Recht auch auf die Linien / Flächen und Cörper gedeutet / indem man alle Grössen als undeterminirte Zahlen ansehen kan (§. 9): welches nun

nun durch gegenwärtige algebraische Rechnung noch mehr gerechtfertiget wird.

Die 46. Aufgabe.

139. Drey Geometrisch = Proportional-Grössen zu finden / aus dem gegebenen Producte des Quadrates der dritten in die erste und dem Exponenten.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die erste Grösse $= x$

der Exponente $= m$ so ist die andere $= mx$

die dritte $= m^2x$

Folgends $a = m^4x^3$

$a : m^4 = x^3$

$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$

Es sey $a = 648$, $m = 3$, so ist $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Die 47. Aufgabe.

140. Aus der gegebenen Summe des ersten und vierdten Gliedes in einer geometrischen Proportion / ingleichen der Summe des anderen und drittens / und dem Exponenten / jedes Glied insbesondere zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$ das erste Glied $= x$

die andere $= b$ so ist das II $= mx$

der Exponente $= m$ das III $= b - mx$

das IV $= a - x$

Folgends

$$x : mx = b - mx : a - x$$

$$ax - x^2 = mbx - m^2 x^2$$

$$a - x = mb - m^2 x$$

$$m^2 x - x = mb - a$$

$$x = (mb - a) : (m^2 - 1)$$

Es sey $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$, so ist $x = \frac{22 - 13}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$ und $mx = 6$.

Die 48. Aufgabe.

141. Aus der gegebenen Summe des ersten und letzten Gliedes und dem Exponenten in einer geometrischen Proportion von 3 Gliedern / die Glieder selbst zu finden.

Auflösung

Es sey die Summe $= a$ das erste Glied $= x$

der Exponente $= m$ das andere $= mx$

das dritte $= m^2 x$

Fol-

Folgends $a = m^2x + x$ / m^2+1. div.

$a : (m^2+1) = x$

Es sey $a = 50$, $m = 2$, so ist $x = 50 : (4+1) = 50 : 5 = 10$, $mx = 20$, $m^2x = 40$.

Die 49. Aufgabe.

141. Zu finden / auf wie vielerley Art die Glieder einer geometrischen Proportion versetzet werden können / damit sie einander proportional bleiben.

Auflösung.

Versetzet sie auf alle mögliche Weise, und vergleichet ihre Summen, Unterscheide u. s. w. mit ihnen untereinander: so werdet ihr bald sehen, in welchen Fällen eine Proportion bleibet, wenn ihr nur acht gebet, ob in beyden Verhältnissen, die mit einander verglichen werden, einerley Exponente ist (§. 65. Arithm.)

Es sey demnach	$a : ma = b : mb$
so ist (*alternatim*)	$a : b = ma : mb$
(*inverse*)	$ma : a = mb : b$
(*conversim*)	$a+ma : a = b+mb : b$
(*Composite*)	$a+ma : ma = b+mb : mb$
(*Divisim*)	$ma-a : a = mb-b : b$
	$ma-a : ma = mb-b : mb$
Ferner	$a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2$
oder überhaupt	$a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

Ingleichen $a : mac = b : mbc$

$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$

$ac : ma = bc : mb$

$a : ma = b : mb$

$\frac{ac}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{bc}{c} : \frac{mb}{c}$

$ac : mac = b : mb$

$d : ma = b : mb$

$\frac{ac}{c} : \frac{mac}{c} = \frac{bd}{c} : \frac{mbd}{c}$

$a : ma = b : mb$

$\frac{ac}{c} : \frac{mac}{c} = \frac{bd}{d} : \frac{mbd}{d}$

Es sey *ordinate* $a : ma = b : mb$

und $ma : mna = mb : mnb$

so ist *ex æquo* $a : mna = b : mnb$

es sey *perturbate* $a : ma = b : mb$

und $ma : mna = b : \frac{b}{n}$

so ist *ex æquo* $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Anmerckung.

143. Hier habet ihr ohne Mühe 18 sehr nützliche Lehrsätze gefunden / die ihr euch wohl bekandt machen müsset / wenn ihr inskünftige entweder die mathematischen Schriften zu lesen / oder auch durch eigenes Nachsinnen mathematische Wahrheiten heraus zu bringen gedencket. Denn die geometrische Proportion ist die Seele der mathematischen Wissenschaften. Ich halte es aber für unnöthig / die gefundenen Lehrsätze mit Wörtern auszudrucken / weil ein jeder das für sich selbst thun kan / wenn er

er Lust darzu hat. Z. E. der 1 Lehrsatz lautet also: **Wenn vier Grössen proportional sind / so verhält sich auch die erste zu der dritten / wie die andere zu der vierdten.** Der 11. wird so gegeben: **Wenn ihr in einer geometrischen Proportion das erste und dritte Glied durch eine Grösse multiplicieret; so bleiben auch die veränderten Grössen den vorigen proportional.**

Die 50. Aufgabe.

144. **Zu finden / wie zwey Grössen verändert werden können / daß doch ihre erste Verhältniß gegeneinander unverändert bleibet.**

Auflösung.

Es seyn zwey Grössen a und ma, die sich gegeneinander verhalten wie 1 zu m; so ist:

I. $a : ma$

$c \quad c$

$ac : mac = a : ma = 1 : m$

II. $a : ma$

$c \quad c$

$a : ma = a : ma = 1 : m$

$c \quad c$

III. $a : ma$
$b : mb$

$a-b : ma-mb = a : ma = b : mb = 1 : m$

IV.

IV. $a : ma$
$b : mb$

$a+b : ma+mb = a : ma = b : mb = 1 : m$

Lehrsatz.

1. Wenn ihr zwey Grössen durch eine dritte multipliciret / so verhalten sich die Producte gegen einander / wie die multiplicirten Grössen. 2. Wenn ihr zwey Grössen durch eine dritte dividiret / so verhalten sich die Quotienten wie dieselben Grössen. 3. Wenn sich die weggenommenen Theile gegen einander verhalten wie die ganze Grössen / so verhalten sich auch die übrigen Theile wie die ganze Grössen. 4. Wenn die hinzu gesetzten Grössen sich verhalten wie die Grössen / zu denen sie addiret werden / so haben auch die Summen eben selbige Verhältnis.

Die 51. Aufgabe.

145. Die Grösse des Products der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Progreßion zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied a, der Exponente oder Nahme der Verhältnis $= m$, so ist die Progreßion

$a. ma. m^2a. m^3a. m^4a. m^5a. m^6a.$

$\frac{m^5a}{m^6a^2} = \frac{m^3a}{m^6a^2} \frac{m^2a}{= m^6a^2} = \frac{a}{m^6a^2}$

Lehrsatz.

In einer geometrischen Progreßion ist das Product der beyden äußersten Glieder dem Producte zweyer von den mittleren gleich / die von den äußersten gleich weit abstehen / und dem Qvadrate des mittleren / wenn sie an der Zahl ungleich sind.

Die 52. Aufgabe.

146. Die Grösse des Qvotienten zu determiniren / der heraus kommet / wenn der Unterscheid der beyden äußersten Glieder durch den umb 1 vergeringerten Exponenten dividiret wird.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, der Exponente $= m$, die Zahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$, der Unterscheid des ersten und letzten $m^{n-1}a - a$. Dividiret denselben durch $m-1$, so kommet heraus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ u. s. w. Wenn demnach n eine determinirte Zahl ist, z. E. 7, so ist $n - 7 = 0$ und demnach $m^{n-7} = m^0 = 1$, folgends $m^{n-7}a = a$. Solchergestalt ist der Qvotient die Summe aller Glieder weniger das letzte

$m-1$

$$m-1)\ m^{n-1}a-a \left(m^{n-2}a+m^{n-3}a+m^{n-4}a+m^{n-5}a+m^{n-6}a\ \&c.\right.$$

$$\begin{array}{l} +m^{n-2}a-a \\ +m^{n-2}a-m^{n-3}a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +m^{n-3}a-a \\ m^{n-3}a-m^{n-4}a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +m^{n-4}a-a \\ m^{n-4}a-m^{n-5}a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +m^{n-5}a-a \\ m^{n-5}a-m^{n-6}a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +m^{n-6}a-a \\ \&c. \end{array}$$

Zusatz.

147. Wenn ihr demnach den Unterscheid des ersten und letzten Gliedes in einer geometrischen Progreßion durch den umb 1 verringerten Exponenten dividiret, und zu dem Quotienten das letzte Glied addiret, so habet ihr die Summe der gantzen Progreßion. Es sey das erste Glied a, der Exponente m, die Zahl der Glieder n, so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$. Und demnach die Summe der Progreßion $m^{n-1}a+(m^{n-1}a-a):(m-1)$, das ist, wenn $m=2$, $a=1$, $n=8$, $128+127:1=255$.

Die

Die 53. Aufgabe.

148. Aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede / mit der Zahl der Glieder in einer geometrischen Progreßion / den Exponenten zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ der Exponente $= x$

das letzte $= b$

die Zahl der Glieder $= n$

So ist $b = x^{n-1} a$

$b : a = x^{n-1}$

$b^1 : (n-1) : a^1 : (n-1) = x$

Es sey $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$, so ist $x = \sqrt[5]{486} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{243} = 3$.

Die 54. Aufgabe

149. Aus dem gegebenen Exponenten / der Zahl der Glieder und der Summe der geometrischen Progreßion das erste Glied zu finden.

Auflösung.

Es sey der Exponente $= m$ das erste Glied $= x$

die Zahl der Glieder $= n$ So ist das letzte $= m^{n-1} x$

die Summe $= c$

Folgends

$$c = m^{n-1}x + (m^{n-1}x - x) : (m-1)$$

$$mc - c = m^n x - m^{n-1}x + m^{n-1}x - x \qquad \text{---} \; m-1$$

$$mc - c = m^n x - x \qquad \text{---} \; m-1$$

$$(m-1)c : (m^n - 1) = x$$

Es sey $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$, so ist $x = 2$.

$728 : 728 = 2$.

Die 55. Aufgabe.

150. Aus dem ersten und letzten Gliede und dem Exponenten die Zahl der Glieder in einer geometrischen Progreßion zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$

das letzte $= b$

der Exponente $= m$

So ist $m^{x-1}a = b$, das ist, wenn ihr den Logarithmum von $a = la$ und den Logarithmum von $m = lm$ setzet,

$x\,lm - lm + la = lb$ (§. 23. Trig.)

$x\,lm = lb - la + lm$

$x = \frac{lb - la + 1}{lm}\,lm$

Es sey $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$, so ist

$lb = 2.6866363$

$la = 0.3010300$

$lb - la = 2.3856063$

$lm = 477121\overset{7}{3}\overset{7}{8}\overset{7}{5}\overset{7}{0}\overset{7}{6}\overset{7}{3}\,\Big(\overset{5}{1}$

$6 = x$

Die 56. Aufgabe.

151. Eine unendliche Zahl Brüche zu summiren/deren Zehler Eines ist/ die Nenner aber in einer geometrischen Verhältnis fortgehen.

Auflösung.

Es sey der Nenner des ersten Bruches $= a$, der Exponente $= m$. Weil die Brüche unendlich abnehmen, so muß der letzte so kleine werden, daß er in Ansehung des ersten für nichts zu halten. Und also ist die Differentz des ersten und letzten Gliedes

dem ersten gleich, das ist, $1 : a$, folgends die Summe $1 : a + 1 : (ma - a) = (m - 1 + 1) : (ma - a) = m : (m - 1)\, a$.

Es sey $m = 2$, so ist die Summe der Brüche $= 2 : a$, folgends $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. s. w. unendlich fort $= 1$.

Es sey $m = 3$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $= 3 : 2a$, folgends $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. w. unendlich fort $= 3 : 6 = \frac{1}{2}$.

Es sey $m = 4$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $= 4 : 3a$, folgends $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ u. s. w. unendlich fort $= 4 : 12 = \frac{1}{3}$.

Anmerckung.

152. Wenn der Zehler überall einerley Zahl ist/ als Z. E. 3/ 6/ 8 ꝛc. so könnet ihr eben mit dieser Regel auskommen. Denn es sey der Zehler b/ so ist die Summe $b : a + b : (ma - a) = (bm - b + b) : (ma - a) = bm : (m - 1)\, a$. Also werdet ihr finden/ daß $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$ &c. $= 6 : 4 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Die 57. Aufgabe.

153. Die Summe unendlicher Brüche zu finden/ derer gemeiner Zehler von dem Nenner des ersten umb eine gegebene Grösse kleiner ist/ die Nenner aber in einer geometrischen Progreßion abnehmen.

Auflösung.

Es sey der Unterscheid zwischen dem gemei-

meinen Zehler und dem Nenner des ersten Bruches $= y$, der Exponente in der Progreßion der Nenner $= m$, der Nenner des ersten Bruches $= a$, so ist der gemeine Zehler $= a - y$, und demnach der erste Bruch $\frac{a-y}{a}$. Weil nun der letzte Bruch aus der unendlichen Progreßion in Ansehung des ersten nichts ist, so ist der Unterscheid dieser beyden $\frac{a-y}{a}$, folgends die Summe $\frac{a-y}{a}$

$$+\frac{a-y}{ma-a} = \frac{ma-my-a+y+a-y}{ma-a} = \frac{ma}{ma}$$

$$\frac{-my}{-a} = m(a-y) : (m-1)a.$$

Es sey $m = 2$, $a = 6$, $y = 3$, so ist die Summe der Progreßion $2(6-3):6 = 6:6 = 1$, das ist, $\frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \frac{3}{24}$ u. s. w. unendlich fort $= 1$.

Eben so findet ihr, daß $\frac{5}{7} + \frac{5}{21} + \frac{5}{63}$ u. s. w. unendlich fort $= 15:14$.

Anmerckung.

154. Diese Aufgaben gehören in die Arithmeticam infinitorum, die *Iohannes Wallisius* zuerst erfunden / und *Ismael Bullialdus* weiter ausgeführet: ich aber in meinen Elementis Analyseos infinitorum zwar kurtz / jedoch viel allgemeiner als beyde abgehandelt. Allein weil man dieselbe nicht mehr sonderlich nöthig hat / nachdem der Herr von Leibnitz seine Differential- und Integral-Rech-

Rechnung bekandt gemacht; wollen wir uns auch mit derselben nicht aufhalten.

Die 12. Erklärung.

155. Drey oder vier Grössen sind harmonisch proportional / wenn im ersten Falle der Unterscheid der ersten und anderen sich verhält zu dem Unterscheide der anderen und dritten wie die erste zu der dritten; im anderen Falle aber wie der Unterscheid der ersten und anderen zu dem Unterscheide der dritten und vierdten wie die erste zu der vierdten. Dergleichen Zahlen sind 2 / 3 und 6 / denn 1 : 3 = 2 : 6. Wenn in dem ersten Falle die Glieder vervielfältiget werden; so entstehet eine harmonische Progreßion.

Die 58. Aufgabe.

156. Zu zwey gegebenen Grössen die dritte harmonische Proportional-Grösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste = a die dritte = x
die andere = b

So ist (§. 155)

$$b-a : x-b = a : x$$

$$ax-ab = bx-ax$$

$$2ax-bx = ab$$

$$ab : (2a-b) = x$$

Es

Es sey $a = 10$, $b = 16$; so ist $x = 160 : (20-16) = 160 : 4 = 40$.

Der 1. Zusatz

157. Wenn $2a = b$; so ist $x = ab : o$, und also $1 : o = x : ab$, folgends kan keine harmonische Proportional-Grösse gefunden werden: welches vielweniger angehet, wenn b grösser als $2a$.

Der 2. Zusatz.

158. Wenn man die dritte Grösse für die andere nimmet; so kan man auf gleiche Weise die vierdte finden, und so weiter fort.

Die 59. Aufgabe.

159. Zwischen zwey gegebenen Grössen die mittlere harmonische Proportional-Grösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $= a$ die andere $= x$
die dritte $= b$

So ist (§. 155)

$$x - a : b - x = a : b$$

$$bx - ab = ab - ax$$

$$bx + ax = 2ab$$

$$x = 2ab : (a+b)$$

Es sey $a = 10$, $b = 40$; so ist $x = 800 : 50 =$

Die 60. Aufgabe.

160. Zu drey gegebenen Grössen die vierdte harmonische Proportional-Grösse zu finden.

Auflösung

Es sey die erste $= a$ die vierdte $= x$
die andere $= b$
die dritte $= c$

So ist (§. 155)

$$b-a : x-c = a : x$$

$$bx - ax = ax - ac$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$ac : (2a-b) = x$$

Es sey $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$; so ist $x = 72$
$: (12-8) = 72 : 4 = 18$.

Anmerckung.

161. Nachdem wir den Nutzen der Algebra in arithmetischen Exempeln gezeiget; so ist es Zeit / daß wir zu geometrischen Aufgaben schreiten.

Die 61. Aufgabe.

162. Aus dem gegebenen Radio des Circuls ED / die Seite des in ihm beschriebenen regulären Drey-Eckes AB zu finden.

Tab. I. Fig. I.

Auflösung.

Es sey DB die Seite des Sechs-Eckes.

Weil

Weil DB = BE (§. 135. Geom.) und bey F rechte Winckel sind (§. 125. Geom.); so ist auch DF = FE (§. 96. Geom.) Es sey demnach

DB = a BA = x
So ist DF = $\frac{1}{2}a$ BF = $\frac{1}{2}x$

folgends $\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}xx$ (§. 172. Geom.)

$3aa = xx$

$\sqrt{3aa} = x$

Ihr findet demnach x, wenn ihr zwischen $3a$ und a die mittlere Proportional-Linie suchet (§. 210. Geom.) Besser aber geschiehet es also: Aus A und B machet mit dem Diameter AB einen Durchschnitt in D und ziehet aus dem Mittelpuncte C die Linie CD. Diese ist die Seite des Dreyeckes. Denn da $DB^2 = 4a^2$ und $CB^2 = a^2$, so ist $DC^2 = 3aa$ (§. 172. Geom.) folgends $DC = \sqrt{3}\,aa$. Oder machet AE = a; so ist wegen des rechten Winckels bey E (§. 115. Geom.) EB = $\sqrt{3aa}$ (§. 172. Geom.) Tab. I. Fig. 2.

Der 1. Zusatz.

163. Weil $3aa = xx$, so ist $aa : xx = 1 : 3$, das ist, $DE^2 : AB^2 = 1.3$. Tab. I. Fig. 1.

Der 2. Zusatz.

164. Wenn die Seite des Drey-Eckes b gegeben ist, und ihr solltet den Radium

des Circuls y finden, welcher umb selbiges beschrieben werden kan; so habet ihr $3y^2 = b^2$ und also ist $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, folgends dörffet ihr nur zwischen der Linie AB (b) und dem dritten Theile derselben ($\frac{1}{3}b$) die mittlere Proportional-Linie suchen (§. 210. Geom.)

Tab. I. Fig. 1.

Der 3. Zusatz.

165. Die halbe Seite AB, nemlich BF, ist der Sinus des Bogens BD von 60° (§. 2. Trigon.) Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe den Sinum von 60° finden (§. 11. Trigon. 112. Ar.)

Die 62. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 3.

166. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des in ihm beschriebenen regulären Acht-Eckes zu finden.

Auflösung.

Es sey $AC = BC = DC = a$, $BD = x$; so ist $AB = \sqrt{2a^2}$ (§. 172. Geom.)

$BE = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$ (125. Geom.) $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

$EC = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{2}a^2)}$ (§. 172. Geom.) $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

$DE = a - \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$, folgends

$DE^2 = \frac{3}{2}a^2 - a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

$BE^2 = \frac{1}{2}a^2$

$DB^2 = 2a^2 - a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$ (§. 172. Geom.)

$DB = \sqrt{(2a^2 - a\sqrt{\frac{1}{2}a^2})}$.

Zu

Zusatz.

167. Die halbe Seite des Acht-Eckes ist der Sinus des Bogens von 22° 30′ (§. 2. Trig.) diesen könnet ihr demnach durch gegenwärtige Aufgabe finden.

Die 63. Aufgabe.

168. Aus der gegebenen Seite des Acht-Eckes DB den Radium des Circuls AC zu finden / der umb dasselbe beschrieben werden kan. Tab. I. Fig. 3.

Auflösung.

Es sey $DB = b$, $BC = y$, so ist, vermöge dessen, was bey der vorhergehenden Aufgabe erwiesen worden

$$b^2 = 2y^2 - 2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2}$$

$$2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2} = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4y^2b^2 + b^4$$

$$-b^4 = 2y^4 - 4b^2y^2$$

$$-\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2$$

$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4 \quad (\S.\ 83)$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}b^4} = y^2 - b^2$$

$$b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^4} = y^2$$

$$\sqrt{(b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^4})} = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})} = y$$

Eine geometrische Construction hat man zwar nicht nöthig, weil sie aus der Geometrie leichter zu haben. Doch kan man den Radium y und den Mittelpunct des Circuls aus dem gefundenen Werthe folgender Gestalt finden. 1. Theilet die Seite des Acht-Eckes AB in zwey gleiche Theile in D und beschreibet darüber einen halben Circul AFB; so ist $AF = FB = V\frac{1}{2}b^2$ (§. 172. Geom.) 2. Ziehet aus dem Mittelpuncte D durch F eine gerade Linie DC, welche auf AB perpendicular stehet. 3. Machet $AE = 2AB + 2FB = 2b + 2V\frac{1}{2}b^2$ und beschreibet über AE einen halben Circul; so ist $AC = V(b^2 + bV\frac{1}{2}b^2)$ oder der verlangte Radius und in C der Mittelpunct des Circuls, der umb das Acht-Ecke beschrieben wird (§. 210. Geom.)

Tab. I. Fig. 4.

Die 64. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 5.

169. Aus dem gegeben Radio des Circuls AC die Seite des Zehen-Eckes AB zu finden.

Auflösung.

Weil $AB = \frac{1}{10}$ der Peripherie, so ist der Winckel ACB 36°, folgends sind die Winckel CAB und ABC ein jeder 72 (§. 109) Geom.) und demnach ist DAC 108 (§. 101. Geom.) Machet $AD = AC$, so ist jeder von den Winckeln ADC und DCA 36 (109. Geom.) daher DCB 72°, und demnach BD : BC = BC : BA (§. 183. Geom.) Es sey $AC = BC = AD = a$,

AB

AB $= x$, so ist BD $= a + x$ / und dannenhero vermöge dessen, was erwiesen worden,

$$a + x : a = a : x$$

$$a^2 = ax + x^2$$

$\frac{1}{4}a^2$ $\frac{1}{4}a^2$ (§. 83.)

$$\frac{5}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = x$$

Richtet auf dem Diameter AB den Radi- Tab. I.
um DC $= a$ aus dem Mittelpuncte C per- Fig. 6.
pendicular auf (§. 95. Geom.) und theilet C B in 2 gleiche Theile in E, (§. 120. Geom.) so ist CE $= \frac{1}{2}a$ und folgends DE $= \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 172. Geom.) machet EF $=$ DE, so ist CF $= \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

Anmerckung.

170. Auf solche Art lehret Ptolomæus Almag. lib. 1. die Seite des Zehen-Eckes zu finden.

Die 65. Aufgabe.

171. Aus dem gegebenen Radio des Cir- Tab. I.
culs DC / die Seite des Fünf-Eckes AB zu Fig. 3.
finden.

Auflösung.

Es sey DC $= a$ AB $= x$

so ist DB $= \sqrt{\frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§. 169) BE $= \frac{1}{2}x$

EC

$EC = V(a^2 - \frac{1}{4}x^2)$
$DE = a - V(a^2 - \frac{1}{4}x^2)$

Folgends

$DE^2 = 2a^2 - \frac{1}{2}x^2 - 2aV(a^2 - \frac{1}{4}x^2)$
$BE^2 = \frac{1}{4}x^2$

---

also $DB^2 = 2a^2 - 2aV(a^2 - \frac{1}{4}x^2)$
es ist auch $DB^2 = \frac{6}{4}a^2 - aV\frac{5}{4}a^2$

---

daher $\frac{1}{2}a^2 + aV\frac{5}{4}a^2 - 2aV(a^2 - \frac{1}{4}x^2) = 0$
(§. 31. Ar.)

$\frac{1}{2}a + V\frac{5}{4}a^2 = 2V(a^2 - \frac{1}{4}x^2)$

$\frac{5}{4}a^2 + aV\frac{5}{4}a^2 = 4a^2 - x^2$

$x^2 = \frac{10}{4}a^2 - aV\frac{5}{4}a^2$
$= a^2 + \frac{6}{4}a^2 - aV\frac{5}{4}a^2$

Demnach $AB^2 = DC^2 + DB^2$, das ist, das Qvadrat des regulären Fünff-Eckes ist gleich dem Qvadrate des Sechs- Eckes und Zehn-Eckes, die in einem Circul beschrieben sind, zusammen genommen. Daher weil DC die Seite des Sechs-Eckes und FC die Seite des Zehn-Eckes (§. 169); so ist DF die Seite des Fünff-Eckes.

Tab. I. Fig. 6.

Anmerckung.

172. Ptolemæus lehret abermahl die Seite des Fünff-Eckes auf solche Art finden.

Zu-

Zusatz.

173. Die halbe Seite des Fünff-Eckes ist der Sinus von 36°, die halbe Seite des Zehen-Eckes der Sinus von 18° (§. 2. Trigon.) Derowegen könnet ihr aus dem gegebenen Radio des Circuls diese beyden Sinus finden. (§. 11. Trigon.)

Die 66. Aufgabe.

174. Eine gerade Linie AC dergestalt in F zu schneiden / daß die gantze Linie AC sich zu dem grossen Theile CF verhält/wie der grosse Theil CF zu dem kleinen FA / oder daß $CF^2 = AC$ in FA. Tab. I. Fig. 6.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CF = x$, so ist $FC = a - x$ und also $x^2 = aa - ax$.

$$x^2 + ax = a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2 \quad (\S. 83).$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

Setzet $AC = DC = a$ rechtwincklicht zusammen, und machet $CE = \frac{1}{2}a$, so ist $DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 172. Geom.). Machet ferner $EF =$ Tab. I. Fig. 6.

DE;

DE, so ist die Linie AC in F auf verlangete Art getheilet.

Anmerckung.

175. Die alten Geometræ nennen dieses lineam media & extrema ratione secare. Man pfleget es auch divinam sectionem zu nennen / weil (wie aus dem Euclide zu sehen) man viel aus dieser Linien-Theilung demonstriret hat.

Zusatz.

176. Wenn *a* der Radius eines Circuls ist, so ist der grosse Theil von der Linie *x* die Seite des Zehen-Eckes (169).

Die 67. Aufgabe.

177. Aus der gegebenen Hypothenuse eines rechtwincklichten Dreyeckes AB und seinem Inhalte das Dreyecke ABD zu zeichnen.

Tab. I. Fig. 7.

Auflösung.

Es sey AB = *a*, der Perpendicul DC = *y* der Inhalt = *bb* so ist der Inhalt $\frac{1}{2}ay$ (§. 156. Geom.)

und demnach $\frac{1}{2}ay = bb$

$$y = \frac{2bb}{a}$$

Beschreibet über AB = *a* einen halben Circul: richtet in A auf dem Diameter AE = 2*b* perpendicular auf und ziehet die Linie EB. Machet AG = $\frac{1}{2}$AE = *b* und ziehet FG mit

EB

EB parallel; so ist AF = $2bb : a$. Wenn demnach FD mit dem Diameter AB parallel gezogen wird; so giebet sich der verlangte Triangel ADB.

Die 68. Aufgabe.

178. Aus dem gegebenen Umbfange AB + BC + CA eines rechtwinckelichten Triangels und seinem Inhalte / die gröste Seite BC zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey AB + BC + CA = a, BC = x,
der Inhalt = bb so ist AC + BA = $a - x$

$(AC + BA)^2 = a^2 - 2ax + x^2$
$AC^2 + BA^2 =$ x^2 (§. 172. Geom.)

$2BA.AC = a^2 - 2ax$ (§. 31. Ar.)
daher (§. 156. Geom.)
$a^2 - 2ax = 4bb$

$a^2 - 4bb = 2ax$

$\frac{1}{2}a - 2bb = x$

a

Suchet zu AB = a, BC = $2b$ und BD = b die vierdte Proportional-Linie BE = $2bb : a$ (§. 187. Geom.) Beschreibet mit BF = $\frac{1}{2}a$ den Bogen FG; so ist EG = x und ihr könnet den verlangten Triangel nach der vorhergehenden Aufgabe beschreiben. Tab. I. Fig. 9.

An-

Anmerckung.

179. Weil alle Flächen durch das Qvadrat ausgemessen werden (§. 147. Geom.); so giebet man in geometrischen Aufgaben jederzeit die Fläche durch eine Linie / deren Qvadrat ihr gleich ist.

Die 69. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 10.

180. Aus der gegebenen Grund-Linie B C und den beyden Winckeln an derselben B und C / die Höhe AD zu finden.

Auflösung.

Es sey $BC = a$, $AD = x$. Weil bey D rechte Winckel sind, so wisset ihr auch die Winckel BAD und DAC (§. 102. Geom.) Es sey der Sinus des Winckels ABD $= t$, der Sinus des Winckels BAD $= r$, der Sinus des Winckels DAC $= q$, der Sinus des Winckels ACD $= p$, so ist $t : r = x :$ BD und $p : q = x :$ DC, (§. 43. Trigon.) folgends BD $= rx : t$ und DC $= qx : p$. Derowegen weil BD + DC $=$ BC, so habet ihr

$$rx : t + qx : p = a$$

$$prx + tqx = apt$$

$$x = apt : (pr + tq)$$

Anders.

Wenn ihr AD als den Sinum totum ansehet, so ist BD der Tangens des Winckels BAD, und DC der Tangens des Winckels DAC

DAC (§. 6. Trigon.). Es sey der Sinus totus $= t$, die Tangentes seyn m und n, so ist $t : m = x :$ BD und $t : n = x :$ DC, folgends ist BD $= mx : t$ und DC $= nx : t$ und demnach

$$a = (nx + mx) : t$$

$$at = nx + mx$$

$$\frac{at}{n+m} = x$$

$$at : (n+m) = x$$

Suchet also zu der Summe der Tangentium der beyden Winckel BAD und DAC dem Sinu Toto und der Grund-Linie BC die vierdte Proportional-Zahl (§. 113. Arithm.) so kommet die Höhe des Triangels AD heraus.

Die 70. Aufgabe.

181. Aus drey gegebenen Seiten eines Triangels AB, AC und CB die Höhe AD zu finden. Tab. I. Fig. 10.

Auflösung.

Es sey AB $= a$
BC $= b$
AC $= c$

BD $= x$
so ist DC $= b - x$

Weil nun $AB^2 - BD^2 = AD^2$ und $AC^2 - DC^2 = AD^2$ (§. 172. Geom.), so ist auch $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$, folgends

$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2bx$$

$$\frac{a^2 - c^2 + \frac{1}{2}b}{2b} = x$$

Wenn ihr BD habet, so könnet ihr (§.172. Geom.) AD finden.

Es sey $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$, so ist $x =$
$(36 - 9) : 8 + 2 = 27 : 8 + 2 = 5 + \frac{3}{8}$.

$AB^2 = 2.3.0.4 : 64$
$BD^2 = 1\ 8\ 4\ 9 : 64$

$AD^2 = 4\ 5\ 5 : 64$ (§.172. Geom.)

4	55	00	00
4			
	55		
	41		
	14.	0.0	
	4	23	
	12	69	
	1	3.1.	0.0
		2	6 3
	1	27	89
		3	11

$21\frac{33}{100}$ demnach ist

$AD = 2133 : 800$.

An-

Anmerckung.

182. Auf eine gleiche Weise könnet ihr aus drey gegebenen Seiten die Höhe des Triangels finden / wenn er stumpfwincklicht ist.

Zusatz.

183. Derowegen könnet ihr auch aus drey gegebenen Seiten den Inhalt eines Triangels finden / (§. 156. Geom.)

Die 71. Aufgabe.

184. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwincklichten Triangels ABC / dessen drey Seiten AC / BA / BC in einer geometrischen Progreßion sind / die Seiten selbst zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung:

Es sey der Inhalt $= a^2$ $AB = y$

$CA = x$

so ist $BC = x^2 : y$

und demnach

$x^4 : y^2 = x^2 + y^2$ (§. 172. Geom.) $xy = 2a_2$ (§. 156. Geom.)

y^2 y

$x^4 = x^2y^2 + y^4$ $x = 2a^2 : y$

$x^4 - x^2y_2 = y^4$ $x^2 = 4a^4 : y^2$

$x^4 = 16a^8 : y_4$

ingleichen $y = 2a^2 : x$

$y^2 = 4a^4 : x^2$

$y^4 = 16a^8 : x^4$

Hieraus nun wird gefunden

$\frac{16a^8 - 4a^4 = y^4}{y^4}$

$16a^8 - 4a^4y^4 = y^8$

$16a^8 = y^8 + 4a^4y^4$
$4a^8 \quad 4a^8$

$20a^8 = y^8 + 4a^4y^4 + 4a^8$

$2a^4\sqrt{5} = y^4 + 2a^4$

$a^4(2\sqrt{5} - 2) = y^4$

$\sqrt[4]{a^4(2\sqrt{5} - 2)} = y$

$\frac{x^4 - 4a^4 = 16a^8}{x^4}$

$x^8 - 4a^4 x^4 = 16a^8$
$4a^8 \quad 4a^8$

$x^8 - 4a^4x^4 + 4a^8 = 20a^8$

$x^4 - 2a^4 = 2a^4\sqrt{5}$

$x^4 = a^4(2 + 2\sqrt{5})$

$x = \sqrt[4]{a^4(2 + 2\sqrt{5})}$

Tab. I. Fig. II. Richtet auf AB = a eine Perpendicular-Linie CA = $2a$ auf; so ist BC = $\sqrt{5aa}$. Machet DB = AB = a; so ist DC = $\sqrt{5aa} - a$. Traget DC aus C in E und aus E in K die Linie CA = $2a$, und beschreibet so wohl über AE als AK einen halben Circul. Ziehet durch C mit AB die Linie FL parallel; so ist FC = $\sqrt{(2a\sqrt{5aa} - 2aa)}$ und CL = $\sqrt{(2aa + 2a\sqrt{5aa})}$, oder FC = $\sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a^2)}$ = $a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$ und CL = $a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Theilet CA in zwey gleiche Theile in H, daß CH = a, und machet CG = CF und CM = CL. Beschreibet sowohl über HG, als HM einen halben Circul; so ist CI = $\sqrt{(aa$

$V(2V5-2)) = aV^4(2V5-2) = y$, und C N $= V(a^2V(2+2V5)) = aV^4(2+2V5) = x$. Derowegen wenn ihr CO $=$ CN machet und die Linie IO ziehet; so ist ICO der verlangte Triangel.

Die 72. Aufgabe.

185. Aus der gegebenen Summe der Seiten AC+AB in einem rechtwincklichten Triangel CAB und dem Perpendicul AD die Seiten zu finden. Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey $AB+AC = a$, $CA-BA = y$, $BC = x$, $AD = b$; so ist $AC = \frac{1}{2}(a+y)$, $AB = \frac{1}{2}(a-y)$ (§. 51. Trigon.), folgends

$x^2 = \frac{1}{2}(aa+yy)$ (§. 172. Geom.)

$2x^2 = aa+yy$

$2x^2-a^2 = y^2$

BA : DA $=$ BC : AC

$\frac{1}{2}(a-y) : b = x : \frac{1}{2}(a+y)$

$\frac{1}{4}(aa-yy) = bx$

$aa-4bx = yy$

Derowegen $2x^2-aa = aa-4bx$

$x^2+2bx = aa$

$x^2+2bx+bb = aa+bb$ (§. 83).

$x = V(aa+bb)-b$

Tab. I. Fig. 12. Auf der gegebenen Linie CD = *a* beschreibet ein Rectangulum CDFG, dessen Höhe DF der Höhe des Triangels *b* gleich ist. Machet FE = FD und CB = CE. Beschreibet über CB einen haben Circul und ziehet die Linien AB und AC; so ist CAB der verlangte Triangel.

Die 73. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 13. 186. Aus dem gegebenen Sinu eines Winckels den Sinum des doppelten / dreyfachen/ vierfachen ꝛc. Winckels zu finden.

Auflösung.

Es sey der einfache Winckel LAM. Nehmet AB für den Sinum Totum an und machet AB = BC = DC = DE = EK, so ist BE der Sinus des Winckels A und AF = FC (§. 107. Geom.) der Cosinus, ferner GBC = 2 BAC (§. 101. 107. Geom.), DCE = CDA + CAD (§. cit.) = 3 CAD, KDE = DEA + KAE (§. cit.) = 4 KAE u. s. w. Folgends ist GC der Sinus des doppelten, DH des dreyfachen, EI des vierfachen Winckels A.

Es sey AB = *r*, BF = *b*, AF = *c*.

so ist AB : BF = AC : GC (§. 183. Geom.)

r *b* 2*c* 2*bc* : *r*

AB : AF = AC : AG

r *c* 2*c* 2*cc* : *r*.

Derowegen ist BG = 2*cc* : *r* - *r* = (2*cc* - *rr*)

$-rr) : r = (\text{weil } r^2 = b^2+c^2)\ (2cc-b^2-c^2)$
$: r = (c^2-b^2) : r$ folgends $AD = AG+GD$
$= (3c^2-b^2) : r.$

$$AB : BF = AD : DH$$
$$r : b = \frac{3c^2-b^2}{r} : \frac{3bc^2-b^3}{r^2}$$

$$AB : AF = AD : AH$$
$$r : c = \frac{3c^2-b^2}{r} : \frac{3c^3-b^2c}{r^2}$$

Derowegen ist $CH = (3c^3-b^2c) : r^2 - 2c$
$= (3c^3 - b^2c - 2cr^2) : r^2 = (\text{weil } r^2 = c^2+b^2)\ (3c^3 - b^2c - 2c^3 - 2b^2c) : r^2$
$(c^3 - 3b^2c) : r^2$, folgends $AE = (3c^3 - b^2c +$
$c^3 - 3b^2c) : r^2 = (4c^3 - 4b^2c) : r^2.$

$$AB : BF = AE : EI$$
$$r : b = \frac{4c^3-4b^2c}{r^2} : \frac{4bc^3-4b^3c^3}{r^3}$$

$$AB : AF = AE : A^I$$
$$r : c = \frac{4c^3-4b^2c}{r^3} : \frac{4c^4-b^2c^2}{r^3}$$

Derowegen ist $DI = (4c^4-4b^2c^2) : r^3 - (3$
$c^2+b^2) : r = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3c^2r^2+b^2r^2) : r^3$
$= (4c^4-4b^2c^2-3b^2c^2-3c^4+b^4+b^2c^2) : r^3 = (c^4$
$-6b^2c^2+b^4) : r^3.$

Wenn demnach der Sinus totus r, der Sinus des einfachen Winckels b, und sein Cosinus c ist, so ist der Sinus

des zwiefachen $2bc : r$
des dreyfachen $(3bc^2 - b^3) : r^2$
des vierfachen $(4bc^3 - 4b^3c) : r^3$
des fünffachen $(5bc^4 - 10b^3c^2 + b^5) : r^4$
des sechsfachen $(6bc^5 - 20b^3c^2 + 6b^5c) : r^5$

Hingegen der Sinus Complementi

des zwiefachen $(cc - bb) : r$
des dreyfachen $(c^3 - 3b^2c) : r^2$
des vierfachen $(c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$
des fünffachen $(c^5 - 10b^2c^3 + 5b^4c) : r^4$
des sechsfachen $(c^6 - 15b^2c^4 + 15b^4c^2 - b^6) : r^5$

Wenn ihr diese Formuln gegen das Potenzen-Täffelein (§. 91) haltet, so werdet ihr wahrnehmen, daß die Glieder vor die Sinus aus den geraden, vor die Cosinus aber aus den ungeraden Stellen der Potentzen genommen werden / nur daß das Mehr- und Minder-Zeichen beständig abwechselt. Woltet ihr demnach allgemeine Formuln haben; so dörffet ihr sie nur aus der allgemeinen Formul für die Potentzen ausschreiben. Nemlich der Sinus des vielfachen Bogens ist

$$\frac{m\, c^{m-1} b}{r^{m-1}} - \frac{m.\, m-1.\, m-2\, c^{m-3} b^3}{1.\, 2.\, 3.\, r^{m-1}} + \frac{m.\, m-1.\, m-2.\, m-3.\, m-4.\, c^{m-4} b^4}{1.\, 2.\, 3.\, 4.\, 5.\, r^{m-1}}$$ &c.

Hingegen sein Cosi-

nus

aus ist $\frac{c^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1\ c^{m-2}\ b^2}{1.2.r^{m-1}} + \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3.4.}$

$\frac{m-3\ c^{m-4}\ b^4}{r^{m-1}}$ — &c.

Zusatz.

187. Weil der Tangens des einfachen Winckels $t = br : c$ und also $c = br : t$ (§. 18. Trigon.) und (§. cit.) wenn der Tangens des zwiefachen v ist

$$\frac{c^2 - b^2}{r} : \frac{2bc}{r} = r : v$$

das ist $c^2 - b^2 : 2bc = r : v$

oder $\frac{b^2r^2 - b^2}{t^2} : \frac{2b^2r}{t} = r : v$

so ist $r^2 - t^2 : 2tr = r : v$

und $v = \frac{2tr^2}{r^2 - t^2}$

Anmerckung.

188. Auf eben diese Art könnet ihr die Tangentes der übrigen vielfachen Winckel / ja auch eine allgemeine Formul für alle Tangentes der vielfachen Winckel finden. Ihr könnet aber auch die Tangentes suchen / ohne daß ihr nöthig habet / die Sinus zu wissen / wie in der folgenden Aufgabe gezeiget wird. Und dazu habet ihr folgenden Satz nöthig.

Wenn der Winckel CAB durch die Linie EA in zwey gleiche Theile getheilet wird / so verhält sich die eine Seite AB zu dem Tab. II. Fig. 14.

ihr anliegenden Theile der Grund-Linie BE, wie die Seite AC zu dem Theile EC, so an ihr lieget.

Beweiß.

Verlängert BA in D, biß AD = AC und ziehet die Linie CD. Weil der Winckel CAB = ACD + ADC (§. 101. Geom.) und CA = AD; so ist auch ACD = ADC (§. 107. Geom.), folgends ACD = $\frac{1}{2}$CAB = CAE. Demnach ist EA mit CD parallel (§. 98. Geom.), und daher BA : BE = AD (= AC) : EC (§. 184. Geom.). W. Z. E.

Zusatz.

189. Derowegen verhält sich auch BA : AC = BE : EC, folgends BA + AC : AC = BC : EC (§. 142).

Die 74. Aufgabe.

190. Aus dem Tangente und Secante des einfachen Winckels die Tangentes und Secantes des zweyfachen, dreyfachen, vierfachen ꝛc. zu finden.

Tab. II. Fig. 15.

Auflösung.

Nehmet AB für den Sinum totum an, so ist BC der Tangens des einfachen Winckels CAB, BD der Tangens des zwiefachen DAB u. s. w.

Es sey $AB = a$, $BC = b$, $BD = x$; so ist $CD = x - b$, $CD^2 = x^2 - 2bx + b^2$, $AD^2 = aa$

$= aa + xx$. Nun ist AB : AD = BC : CD (§. 187), und daher $AB^2 : AD^2 = BC^2 : CD^2$ (§. 142), das ist,

$$a^2 : a^2 + x^2 = b^2 : x^2 - 2bx + b^2$$

$$a^2 b^2 + b^2 x^2 = a^2 x^2 - 2a^2 bx + a^2 b^2$$

$$2a^2 bx = a^2 x^2 - b^2 x^2$$

$$a^2 x - b^2 x$$

$$2a^2 b : (a^2 - b^2) = x$$

Derowegen ist $CD = x - b = 2a^2 b : (a^2 - b^2) - b = (2a^2 b - a^2 b + b^3) : (a^2 - b^2) = (a^2 b + b^3) : (a^2 - b^2)$.

Die Secantem AD findet ihr nun also.

BC : CD = AB : AD (§. 187).

$$b : \frac{a^2 b + b^3}{a^2 - b^2} = a : AD$$

das ist $$1 : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = a : AD$$

folgends $AD = (a^3 + ab^2) : (a^2 - b^2)$.

Oder wenn ihr den Secantem des einfachen Winckels $AC = V(a^2 + b^2) = c$ setzet, so ist $AD = ac^2 : (a^2 - b^2)$.

Auf gleiche Art wird der Tangens des dreyfachen Winckels $BE = (3a^2 b - b^3) : (a^2 - 3b^2)$ und der Secans $AE = c^3 : (a^2 - 3b^2)$ gefunden, u. s. w.

Die

Die 75. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 8. **191. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwincklichten Triangels ABC und dem Winckel B die Seiten zu finden.**

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= b^2$ AB $= x$
der Sinus Totus $= r$ so ist:
der Tangens B $= t$ $r : t = x :$ AC (§. 6. Trig.)

daher AC $= tx : r$

Folgends $tx^2 : 2r = b^2$

$$x^2 = (2b^2r : t)$$

$$x = \sqrt{(2b^2r : t)}$$

Tab. II. Fig. 16. Machet in dem gegebenen Winckel EDA die Seite DA $= 2b$ und richtet AE perpendicular auf; so ist zugleich AD $= r$ und AE $= t$. Verlängert EA in G und richtet in D die perpendicular-Linie DG auf; so ist AG $= 2br : t$ (§. 210. Geom.) Machet AH $=$ AG und theilet AD in 2 gleiche Theile in I, daß AI $= b$. Werffet über HI einen halben Circul; so ist (§. 210. Geom.) AL $= \sqrt{(2b^2r : t)}$. Machet endlich AB $=$ AL und ziehet aus B die Linie BC mit DE parallel; so ist ABC der verlangte Triangel.

Die

Die 76. Aufgabe.

192. Ob des Renaldini Regel in einem Circul ein jedes reguläres Viel-Ecke zu beschreiben richtig sey oder nicht / zu untersuchen. Tab. II. Fig. 17.

Auflösung.

Die Regel des Renaldini ist diese: Wenn man über dem Diameter AB einen gleichseitigen Triangel aufrichtet, den Diameter AB aber in so viel gleiche Theile theilet, als die Peripherie sol getheilet werden, und aus F durch den andern Theilungs-Punct D die Linie FG ziehet; so ist BG die Seite des verlangten Viel-Eckes. Wir wollen durch das Acht-Ecke zeigen, daß die Regel unrichtig ist. Denn in anderen Fällen verfähret man auf gleiche Weise. Es sey demnach der halbe Diameter CB = 1, die halbe Seite des Vier-Ecks EG = x, und BG sey die Seite des Acht-Eckes; so ist CD = $\frac{1}{2}$ vermöge der Regel und FC = $\sqrt{3}$ (§. 162). Weil nun FCB und CEG rechte Winckel sind, und CD F = GDE (§. 61. Geom.); so ist (§. 183. Geom.)

$$FC : CD = EG : DE$$
$$\sqrt{3} : \tfrac{1}{2} = x : \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

Daher ist $CE = \frac{\sqrt{3}+x}{2\sqrt{3}}$, folgends weil

$$CE^2 + EG^2 = CG^2 \text{ (§. 172. Geom.)},$$

3+

$$3 + 2x\sqrt{3} + x^2 + x^2 = 1$$

$$\frac{12}{12}$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13\,x^2 = 12$$

$$13x^2 + 2x\sqrt{3} = 9$$

$$x^2 + \frac{2}{13}x\sqrt{3} = \frac{9}{13}$$

$$x^2 + \frac{2}{13}x\sqrt{3} + \frac{3}{13}\cdot\frac{13}{13} = \frac{9}{13} + \frac{3}{13}\cdot\frac{13}{13} = \frac{120}{13}\cdot\frac{30}{13}$$

$$\frac{1}{13}\sqrt{3} + x = \frac{1}{13}\sqrt{120} = \frac{2}{13}\sqrt{30}$$

$$x = \frac{2}{13}\sqrt{30} - \frac{1}{13}\sqrt{30}$$

Nun ist aber $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. 16. Trigon.) Derowegen erhellet, daß die Regel des Renaldini die halbe Seite des Viereckes unrichtig herausbringet.

Die 77. Aufgabe.

193. Einen Circul zu finden / der so groß ist als die Fläche eines gegebenen Cylinders.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Cylinders $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$ so ist die Fläche $= ap$ (§. 221. Geom.). Es sey ferner der Diameter des Circuls $= x$, so ist $d : p = x : (px : d)$. Und demnach die Peripherie des Circuls $px : d$, folgends seine Fläche $px^2 : 4d$ (§. 168. Geom.). Derowegen ist

px

$$px^2 : 4d = ap$$

$$x^2 = 4ad$$

$$x = V\,4ad \text{ oder } \tfrac{1}{2}x = V\,ad$$

Der halbe Diameter des verlangten Circuls ist die mittlere Proportional-Linie zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Die 78. Aufgabe.

194. Aus der gegebenen Verhältnis der Höhe eines Cylinders zu seinem Diameter und dem Diameter eines Circuls / der seiner Fläche gleich ist / die Höhe des Cylinders und seinen Diameter zufinden.

Auflösung.

Es sey die gegebene Verhältnis $m : n$, der Diameter des Circuls $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe des Cylinders $= x$; so ist sein Diameter $= nx : m$ und seine Peripherie $= npx : md$, folgends

$$npx^2 : md = \tfrac{1}{4}pd$$

$$x^2 = md^2 : 4n$$

$$x = V\,(md^2 : 4n)$$

Machet AB $= n$ und richtet darauf perpendi- Tab. II.
cular auf BC $= m$. Machet ferner AD $= \tfrac{1}{2}d$ Fig. 18.

$\frac{1}{2}d$ und richtet in D die Perpendicular-Linie DE auf $= \frac{md}{2n}$. Machet endlich DF = DE und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist $DG = \sqrt{md^2 : 4n}$ (§. 210. Geom.)

Die 79. Aufgabe.

195. Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel und der Höhe eines Cylinders / der ihr gleich ist / den Diameter des Cylinders zu finden.

Auflösung.

Es sey die Höhe des Cylinders $= a$, der Diameter der Kugel $= d$, ihre Peripherie $= p$, der Diameter des Cylinders $= x$; so ist der Inhalt der Kugel $= \frac{1}{6} pd^2$ (§. 237. Geom.) die Peripherie des Cylinders $px : d$, sein Inhalt $apx^2 : 4d$ (§. 221. Geom.) und demnach

$$\frac{\frac{1}{6}pd_2 = apx^2 : 4d}{\frac{4}{6}pd^3 = apx^2} \quad \begin{matrix} \cdot 4d \\ \cdot ap \end{matrix}$$

$$\frac{2d^3 = x^2}{3a}$$

$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x$$

Es wird also der Werth von x eben wie in der vorhergehenden Aufgabe gefunden.

Die

Die 80. Aufgabe

196. Aus dem gegebenen Diameter eines Coni und der Höhe / den Diameter eines Cylinders zu finden / der ihm der Höhe und dem Inhalte nach gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $= d$, die Höhe $= a$, der Diameter des Cylinders $= x$, die Verhältnis des Diametri zur Peripherie $= d : p$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12} adp$, die Peripherie des Cylinders $px : d$, und sein Inhalt $apx_2 : 4d$, folgends

$$\frac{\frac{1}{12} adp = apx^2 : 4d}{\frac{1}{3} ad^2p = apx^2} \quad \frac{}{4d}$$

$$\frac{\frac{1}{3} d^2 = x^2}{V\frac{1}{3} d^2 = x} \quad \frac{}{ap}$$

Beschreibet auf d einen gleichseitigen Triangel und darumb einen Circul; diese ist die Grund-Fläche des Cylinders (§. 164).

Die 81. Aufgabe.

197. Aus dem gegebenen Diameter eines Coni und seiner Höhe / den Diameter einer Kugel zu finden / die ihm gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter der Grundfläche des Coni $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$, der Diameter der Kugel $= x$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12} adp$ (§. 229. Geom.) hingegen der Inhalt der Kugel $px^3 : 6d$ (§. 237. Geom.). Derowegen ist

$$\frac{\frac{1}{12} adp = px^3 : 6d}{\frac{1}{2} ad^2 = x^3}$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2} ad^2} = x$$

Anmerckung.

198. Bißher habe ich in leichten geometrischen Exempeln den Nutzen der Algebra gezeiget: nun aber wird es Zeit seyn / daß ich darthue / wie man in der höheren Geometrie mit sonderbahrem Vortheile sich derselben bedienе. Es handelt aber die höhere Geometrie von den krummen Linien. Derowegen sol ich zeigen / wie man durch Hülffe der Algebra die Eigenschaften der krummen Linien finden kan. Zwar dienet darzu hauptsächlich die Differential- und Integral-Rechnung / von der im anderen Theile gehandelt werden sol: allein man kan auch durch die gemeine Algebra gar viel ausrichten. Damit ihr aber verstehen möget / was hinfort beygebracht werden sol; so muß überhaupt etwas von den krummen Linien angeführet werden. Bildet euch aber nicht ein / als wenn diese Betrachtung gantz fruchtloß wäre. Vielmehr versichert euch / daß sie denenjenigen sehr zustatten kommet / welche die Geheimnisse der Natur und Kunst genauer als andere einzusehen belieben. Ich würde jetzt vergeblich reden / wenn ich einen weitläuftigen Beweiß hiervon führen wolte. Hier mercket nur überhaupt / daß man gewohnet ist die krummen Linien durch algebraische Gleichungen zu erklären / welche die Relation gewisser geraden Linien / die man innerhalb denselben ziehen kan / gegen einander andeuten. Z. E. Es sey AMB ein halber

Cir-

Circul und in demselben PM auf dem Diameter AB perpendicular. Setzet $AB = a$, $AP = x$; so ist $PB = a - x$. Es sey ferner $PM = y$; so ist beständig $y^2 = ax - xx$ (§. 210. Geom. & §. 137. Algebr.) Derowegen drucket diese Gleichung die Relation aus/ welche die Linie PM zu AP in allen Puncten der Peripherie AMB hat. Und darumb nennet man sie die Erklärung des Circuls. Gleichwie nun aber alles/ was von der Sache erkandt werden kan/ aus ihrer Erklärung hergeleitet wird (§. 2. Meth. Math.) so pfleget man auch aus dergleichen Gleichungen durch die Algebra die Eigenschaften der krummen Linien herzuleiten. Tab. II. Fig. 19.

Von den krummen Linien.

Die 13. Erklärung.

199. Die Linie AX/ welche alle gerade Linien MM/ die mit einander innerhalb einer krummen Linie parallel gezogen werden/ in zwey gleiche Theile PM und PM theilet/ wird der Diameter/ und insonderheit die Axe genennet/ wenn sie mit eben den Linien einen rechten Winckel machet. Tab. II. Fig. 20.

Die 14. Erklärung.

200. Die Linien MM werden die Ordinaten; ihre Helfften aber PM die Semiordinaten genennet.

Die 15. Erklärung.

201. Hingegen die Abscisse AP ist das Stücke des Diameters oder der Axe/ welches die Ordinaten MM abschneiden.

Die 16. Erklärung.

Tab. II. Fig. 20. 202. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punct A / darinnen sich die Axe oder auch der Diameter AX endet.

Die 17. Erklärung.

203. Eine algebraische Linie wird genennet / deren Natur durch eine algebraische Gleichung sich erklären läst.

Die 1. Anmerckung.

204. Durch die algebraischen Gleichungen verstehen wir diejenigen / die einerley Grad haben in allen Puncten der krummen Linie. Dergleichen ist die Gleichung des Circuls $y^2 = ax - x^2$. Es ist aber wohl zu mercken / daß für eine krumme Linie öfters verschiedene Gleichungen gefunden werden / gleichwie man verschiedene Erklärungen von ihnen geben kan / wenn sie mehr als eine eigenthümliche Eigenschaft haben. Z. E. Es sey im Tab. II. Fig. 19. Circul der halbe Diameter $AC = a$, $PC = x$, $PM = y$, so ist die Gleichung / welche die Natur des Circuls erkläret $a^2 - x^2 = y^2$.

Die 2. Anmerckung.

205. Man nennet insgemein mit dem *des Cartes* die algebraischen Linien / geometrische Linien: allein wir sind bey der Benennung des Herrn von Leibnitz geblieben / mit welchem auch der grosse Engelländische Geometra *Newton* übereinstimmet / welcher (in Arithm. Univ. p. 280.) wohl erinnert / daß nicht die Gleichung Ursache sey / warumb man eine krumme Linie zu Auflösung der Fragen in die Geometrie nehmen sol / sondern es solle vielmehr darumb geschehen / weil sie sich leicht beschreiben läst.

Die 18. Erklärung

206. Eine transcendentische Linie wird genennet / deren Natur durch kei-

ne

ne algebraische Gleichung sich erklären läst.

Anmerckung.

207. Insgemein nennet man die transcendentischen Linien mechanische Linien/ abermals mit dem *des Cartes*, und wirft solchergestalt viel Linien aus der Geometrie/ die sich leicht beschreiben lassen: welches wir mit dem Herrn von Leibnitz mit Recht mißbilligen/ als welcher eine besondere Art der Gleichungen für diese Linien erfunden/ dadurch ihre Eigenschaften so wohl als der algebraischen Linien herausgebracht werden.

Die 19. Erklärung

208. Alle algebraische Linien werden zu einem Geschlechte gerechnet/ da die Glieder der Gleichungen auf gleiche Abmessungen steigen. Da nun die Gleichung für eine gerade Linie allein eine Abmessung haben kan/ so nennet man eine Linie von dem ersten Geschlechte/ wenn die Glieder der Gleichung zwey Abmessungen haben: sind derselben drey/ so ist es eine Linie von dem anderen Geschlechte: sind ihrer viere/ eine Linie von dem dritten Geschlechte u. s. w.

Anmerckung.

209. Die Gleichung für den Circul ist $y^2 = ax - x^2$/ oder auch $a^2 - x^2 = y^2$. Demnach ist der Circul eine Linie von dem ersten Geschlechte. Wiederumb wenn $ax = y^2$ die Natur einer krummen Linie erkläret; so ist dieselbe abermahl eine von dem ersten Geschlechte. Hingegen wenn die Erklärung der krummen Linie $a^2x = y^3$ ist/ so ist sie eine Linie von dem anderen Geschlechte.

Die 20. Erklärung

210. Die algebraischen Linien rechnen wir zu einer Familie / in deren Gleichungen alle Glieder bis auf die Exponenten der Dignitäten mit einander übereinkommen.

Die 1. Anmerckung.

211. Demnach gehören die krummen Linien / deren Natur durch die Gleichungen $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3 x = y^4$ erkläret wird / zu einer Familie.

Zusatz.

212. Die krummen Linien können alle unter eine Gleichung gebracht werden, die zu einer Familie gehören, wenn man nemlich für die determinirte Exponenten undeterminirte setzet.

Die 2 Anmerckung

213. Solchergestalt sind alle krumme Linien / die sich durch $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3 x = y^4$ u. s. w. erklären lassen / unter dieser Gleichung enthalten $a^{m-1} x = y^m$.

Die 3. Anmerckung.

214. Solchergestalt könnet ihr alle algebraische Linien für eine grosse Familie rechnen / die aus unendlich kleineren bestehet / deren jede unendliche Geschlechter hat. Denn weil in allen Gleichungen / dadurch die Natur der krummen Linien erkläret wird / entweder eine gewisse Dignität der Abscisse und Ordinate bloß durch bekandte Grössen / oder zugleich verschiedene Dignitäten derselben in einander / oder auch für einige Glieder lauter bekandte Grössen in einander multipliciret werden / alle Gleichungen aber sich auf 0 solviren / wenn man alle Glieder auf eine Seite setzet (als an stat $ax = y^2$ könnet ihr sagen $y^2 - ax = 0$); so wird eine General-Gleichung

für

für alle algebraische Linien seyn $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$. Man setzet überall das Zeichen + / weil die Zeichen auf gar viel Arten verändert werden können.

Die 4. Anmerckung.

215. Diese Eintheilung der Linien in ihre Geschlechter und Familien hat ihren Nutzen: und dienet die letztere sonderlich dazu / daß wir dasjenige / was vielen Linien gemein ist / auf einmahl erkennen. Die erstere Eintheilung ist zu dem Ende aufgebracht worden / daß man eine Wahl der Linien anstellen könte / wenn man einige zu Auflösung einer Aufgabe aussuchen sol: wovon ich an seinem Orte reden wil.

Die 5. Anmerckung.

216. Unter den krummen Linien sind sonderlich diejenigen für anderen berühmt / welche aus geschickter Zerschneidung eines Kegels oder Coni entstehen / und daher von den Alten *Sectiones Conicæ*, oder Kegelschnitte genennet worden. Denn weil die Alten sie nebst dem Circul allein in die Geometrie nahmen; haben sie auch viel von ihren Eigenschaften geschrieben / und die neueren haben noch ein mehreres dazu gefunden. Derowegen wollen auch wir ihre vornehmste Eigenschaften durch algebraische Rechnungen untersuchen / und zu dem Ende für ihre Erklärungen algebraische Gleichungen annehmen. Es sind aber dieser Linien drey / nemlich die *Parabola*, die *Ellipsis* und die *Hyperbola*. Mercket hier einmahl für allemahl / daß wir beständig die Abscisse x und die halbe Ordinate y nennen wollen.

Die 21. Erklärung

217. Die PARABOLA ist eine krumme Linie / in welcher $ax = y^2$ / das ist / in welcher das Qvadrat der halben Ordinate dem Rectangulo aus der Abscisse in eine beständige Linie gleich ist / die der Parameter genennet wird.

Der 1. Zusatz.

218 Derowegen ist in der Parabel $a = y^2 : x$, das ist, der Parameter ist die dritte Proportional-Linie zu einer jeden Abscisse und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

Der 2. Zusatz.

219. Es ist ferner $\sqrt{ax} = y$, das ist, die halbe Ordinate ist die mittlere Proportional-Linie zwischen dem Parameter und der ihr zugehörigen Abscisse.

Der 3. Zusatz.

Tab. II. Fig. 21.

220. Solchergestalt könnet ihr eine Parabel beschreiben, wenn deren Parameter gegeben wird. Traget nemlich auf die Linie AX den Parameter BA und ziehet durch A die Linie CD auf AX perpendicular. Beschreibet nach gefallen Circul, die einander in B berühren, und die Linie BX in P, die Linie CD in 1. 2. 3 4. 5. durchschneiden. Durch P ziehet Linien I. I, II. II, III. III, u. s. w. mit CD parallel und lasset darauf aus 1. 2. 3. u. s. w. perpendicular-Linien 1. I, 2. II, 3. III. u. s. w. herunter fallen, oder welches gleichviel ist, machet PI = A1, P. II = A2, P III = A3 u. s. w.; so sind die Puncte I, II, III u. s. w. in der Parabel. Denn es sey AB = a, AP = x, A3 = P III = y; so ist $y^2 = ax$ (§. 210. Geom.) und also der Punct III in der Parabel (§. 217).

Der

Der 4. Zusatz.

221. Ihr könnet auch in einer jeden Parabel einen verlangten Punct geometrisch determiniren. Z. E. Ihr wolltet wissen, ob M recht in der Parabel sey. Lasset aus M in P ein Perpendicul fallen, und traget aus P in B den Parameter. Werffet über BA einen halben Circul, wenn er durch den Punct M gehet, so ist er in der Parabel (§. 210. Geom. & §. 217. Algebr.). Tab. III. Fig. 22.

Der 5. Zusatz.

222. Endlich ist $x = y^2 : a$, das ist, die Abscisse ist die dritte Proportional-Linie zu dem Parameter und der halben Ordinate. Daher wenn AB der Parameter ist und BAQN ein Rectangulum; wenn man ferner NM mit BP parallel ziehet und auf AN die Linie AM perpendicular aufrichtet; so ist der Punct M in der Parabel. Denn in dem bey A rechtwincklichten Triangel NAM ist NQ : QA = QA : QM das ist, AB : PM = PM : AP also $a : y = y : x$. Tab. III Fig. 23.

Der 6. Zusatz.

223. Die erklärte Parabel (welche man die Apollonische zu nennen pfleget, weil Apollonius Pergæus unter den Alten gründlich von ihr geschreiben) ist eine Linie von dem ersten Geschlechte (§. 208).

Der 7. Zusatz.

224. Wenn ihr demnach $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^4x = y^5$ &c. setzet, so habet ihr Parabeln von dem anderen, dritten, vierdten &c. Geschlechte. Und daher erkläret $a^{m-1}x = y^m$ eine gantze Familie unendlicher Geschlechter der Parabeln. Gleicher Gestalt wenn ihr $ax^2 = y^3$, $ax^3 = y^4$, $ax^4 = y^5$ &c. setzet; so habet ihr noch andere Arten der Parabeln von dem anderen, dritten, vierdten &c. Geschlechte, welche alle unter der Gleichung $ax^{m-1} = y^m$ enthalten sind. Beyde Familien gehören unter diese Gleichung nebst unendlich anderen Linien $a^nx^m = y^{n+m}$.

Der 8. Zusatz

Tab. III. Fig. 23.

225. Wenn ihr auf die Sehne AM der Parabel von dem ersten Geschlechte ein Perpendicul AR aufrichtet, welches die Semiordinate PM, wenn sie verlängert wird, in R durchschneidet; so ist der Punct R in der Parabel von dem anderen Geschlechte. Denn wegen des rechten Winckels bey A ist PM: AP = AP: PR, und daher $PM^2 : AP^2 = AP^2 : PR^2$, oder $PM^2 : SR^2 = SR^2 : AS^2$. Wenn ihr demnach $AB = a$, $AP = SR = y$ und PR = SA = x setzet; so habet ihr $ay : y^2 = y^2 : x^2$, folgends $y^3 = ax^2$.

Die 1. Anmerckung.

226. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem anderen Geschlechte die von dem dritten und

so weiter unendlich fort gefunden / wie ich in den Actis Eruditorum dieses 1717ten Jahres gezeiget.

Der 9. Zusatz.

227. Wenn ihr AS dem Parameter gleich machet, und RS in S perpendicular aufrichtet, dann aus S in R die halbe Ordinate QM traget und endlich aus A durch R die Linie AN ziehet; so ist N ein Punct in der Parabel von dem anderen Geschlechte, in welcher $y^3 = a^2x$. Denn es sey $AQ = y$, $AS = a$; so ist $QM = SR = y^2 : a$, folgends da $AS : SR = AQ : QN$, das ist, $a : \frac{y^2}{a} = y : x$; so findet ihr $a^2x = y^3$. Tab.III. Fig. 24.

Die 2. Anmerckung.

228. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem andereu Geschlechte die von dem dritten und so weiter unendlich fort gefunden / wie ich in den Actis Eruditorum A. 1717. gezeiget.

Die 22. Erklärung

229. Der Brenn-Punct (Focus) ist der Punct in der Axe / wo der Parameter die Ordinate abgiebet.

Die 82. Aufgabe.

230. Die Weite des Brenn-Punctes F von der Scheitel A zu finden. Tab.III. Fig. 25.

Auflösung.

Es sey $AF = x$, der Parameter $= a$, so ist $FR = \frac{1}{2}a$ (§.229), folgends

$\frac{1}{4}a^2$

$$\tfrac{1}{4}a^2 = ax$$

$$\tfrac{1}{4}a = x$$

Tab. III. Fig. 25. In der Parabel ist die Weite des Brennpunctes F von der Scheitel A dem vierdten Theile des Parameters gleich.

Die 83. Aufgabe.

231. Die Verhältnis zu finden / welche die Ordinaten gegen einander haben.

Auflösung.

Tab. III. Fig. 22. Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, $Ap = v$, $PM = y$, $pm = z$, so ist $y^2 = ax$, und $z^2 = va$ (§. 217), folgends $y^2 : z^2 = ax : av = x : v$ (§. 144). Demnach ist $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$, das ist,

In der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Abscissen.

Die 84. Aufgabe.

232. Die Grösse des Rectanguli aus der Summe zweyer halben Ordinaten $PM + pm$ in ihre Differenz Rm zu finden.

Auflösung

$$pm + PM = \sqrt{av} + \sqrt{ax} \quad \text{§. 219.}$$
$$mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax}$$

$$(pm + PM)\ mR = av - ax = a(v-x)$$

Das

Das Rectangulum aus der Summe zweyer halben Ordinaten in ihre Differentz ist gleich dem Rectangulo aus dem Parameter in die Differentz der zugehörigen Abscissen.

Zusatz.

233. Derowegen verhält sich der Parameter zu der Summe zweyer halben Ordinaten, wie ihre Differentz zu der Differentz der Abscissen.

Die 85. Aufgabe.

234. Die Verhältnis der Sehnen AM und AM zu finden, welche aus der Scheitel der Parabel A gegen das Ende der Ordinaten gezogen werden. Tab. III. Fig. 23.

Auflösung.

Weil $PM^2 = ax$, $AP^2 = x^2$; so ist $AM^2 = ax + x^2$ (§. 172. Geom.). Wiederumb wenn ihr $AP = v$ setzet; so ist $AM^2 = av + v^2$. Derowegen ist

$$AM^1 : AM^2 = ax + x^2 : av + v^2$$
$$= (a + x)\, x : (a + v)\, v$$

Die Quadrate der Sehnen AM und AM verhalten sich in der Parabel wie die Rectangula aus den Abscissen in die Aggregate der Abscissen und des Parameters.

Die 86. Aufgabe.

235. Die Grösse der Linie FM zu finden. Tab. III. Fig. 25.

den / die aus dem Brenn-Puncte an das Ende einer Ordinate M gezogen wird.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, so ist $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 230), $PF = x - \frac{1}{4}a$, folgends

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$
$$PM^2 = ax \quad (\S. 217)$$

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (\S. 172. \text{Geom.})$$

$$FM = x + \frac{1}{4}a$$

Die gerade Linie FM / welche aus dem Brenn-Puncte F einer Parabel gegen das Ende ihrer Ordinate M gezogen wird / ist gleich der Summe aus der Abscisse und der Weite des Brenn-Punctes von der Scheitel.

Der 1. Zusatz.

Tab. III. Fig. 25.

236. Wenn ihr den vierdten Theil des Parameters aus A in F und in f traget, durch AX so viel Parallel-Linien MM ziehet, als euch gefället und aus F mit der Weite Pf die Puncte M beyderseits abschneidet; so könnet ihr abermahls eine Parabel beschreiben.

Der 2. Zusatz.

Tab. III. Fig. 26.

237. Ihr könnet auch dieses durch die Bes-

wes

wegung verrichten. Denn nehmet wie vorhin auf der Axe Af = AF = $\frac{1}{4}a$. Befestiget in f ein Lineal DC dergestalt, daß es in f mit fX einen rechten Winckel machet. Nehmet ein Winckel-Maaß IGH und befestiget an seinem einen Ende H einen Faden, der ihm gleich ist: das andere Ende aber des Fadens bindet an einen Nagel, den ihr im Brenn-Puncte F eingeschlagen. Wenn ihr einen Stift an das Winckel-Maaß IGH haltet und es an dem Lineale DC verschiebet; so wird sich die Parabel beschreiben. Denn es ist beständig FM = AP + Af = $x + \frac{1}{4}a$ und daher M ein Punct in der Parabel (§. 235).

Anmerckung.

238. Auf ebenmäßige Art könnet ihr die Eigenschaften der Parabeln von höheren Geschlechten untersuchen. Wollet ihr aber diejenigen haben / welche allen Parabeln gemein sind / so dörffet ihr nur die allgemeine Gleichung für ihre gantze Familie annehmen. Denn weil $a^{m-1}x = y^m$, so ist auch $a^{m-1}v = z^m$, folgends $PM^m : pm^z = AP : Ap$. Wiederumb weil $PM + pm =$, $\sqrt[m]{a^{m-1}x} + \sqrt[m]{a^{m-1}v}$, $mR = \sqrt[m]{a^{m-1}v} - \sqrt[m]{a^{m-1}x}$; so ist $(PM + pm)\ mR = \sqrt[m]{a^{2m-2}v^2} - \sqrt[m]{a^{2m-2}x^2}$. Weil $FR = \frac{1}{2}a$; so ist $a^m : 2^m = a^{m-1}x$, folgends $x = a : 2^m = AF$. Tab. III. Fig. 22. Tab. III. Fig. 25.

Die 23. Erklärung.

239. Die ELLIPSIS ist eine krumme Linie / in welcher sich verhält das Rectangulum Tab. III. Fig. 27.

aus

aus den Theilen der Axe AP und PB / zu dem Qvadrate ihrer halben Ordinate PM wie die Axe AB zu einer unveränderlichen Linie / die ihr Parameter genennet wird; das ist, wenn ihr AB $= a$ / den Parameter $= b$ / PM $= y$ und AP $= x$ setzet / in welcher $ay^2 = abx - bx^2$.

Der 1. Zusatz.

240. Derowegen ist $y^2 = bx - bx^2 : a$, das ist, das Qvadrat der halben Ordinate ist gleich einem Rectangulo aus der Abscisse in den Parameter, weniger ein Rectangulum aus eben dieser Abscisse in die vierdte Proportional-Linie zu der Axe, dem Parameter und der Abscisse.

Der 2. Zusatz.

241. Weil $ay^2 = abx - bx^2$, so ist

$$bx^2 : (bx - y^2) = a$$

Demnach könnet ihr in einer Ellipsi aus dem gegebenen Parameter der Abscisse und halben Ordinate die Axe folgender gestalt finden. Suchet zu PE $= b$, PM $=$ PF $= y$ die dritte Proportional-Linie PG $= y^2 : b$. Machet AP $= x$ und PH $=$ PG; so ist AH $= x - y^2 : b = (bx - y^2) : b$. Machet ferner AI $=$ AH und AL $=$ AP $= x$, und ziehet LB mit IP parallel; so ist AB $= a$, oder die verlangte Axe.

Tab. III. Fig. 28.

Der

Der 3. Zusatz.

242. Wiederumb weil $ayy = abx - bxx$, so ist $b = ayy : (ax - x^2)$, und daher könnet ihr in einer gegebenen Ellipsi den Parameter also finden. Richtet in B die Perpendicular-Linie BE auf und ziehet aus A durch M die Linie AE, so ist $BE = ay : x$ (§. 184. Geom.). Machet $BG = PM$, und ziehet die Linie PE, und mit ihr GH parallel; so ist $BH = ay^2 : (ax - x^2) = b$ (§. cit.), das ist, der verlangte Parameter. Tab. III Fig. 29.

Der 4. Zusatz.

243. Weil $yy = (abx - bxx) : a$, so ist $y = V(bx - bxx : a)$. Derowegen wenn euch die Axe und der Parameter gegeben werden, könnet ihr für jede Abscisse ihre gehörige halbe Ordinate folgender gestalt finden. Suchet zu der Axe $AB = a$ dem Parameter $BC = b$ und der Abscisse $AP = x$ die vierdte Proportional-Linie $PD = bx : a$ ziehet DE mit AB parallel; so ist $CE = b - bx : a$. Machet $PF = CE$ und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist $PM = V(bx - bx^2 : a) = y$, das ist, die verlangte halbe Ordinate. Tab. III. Fig. 30.

Die 87. Aufgabe.

244. Die Weite des Brenn-Punctes A von der Scheitel A zu finden.

Auflösung.

Tab. III. Fig. 27. Es sey AB $= a$, der Parameter $= b$, AF $= x$, so ist FR $= \frac{1}{2} b$ (§. 229), und

$$\frac{1}{4} ab^2 = abx - bxx \text{ (§. 239).}$$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4} ab$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab$$

$$\frac{1}{2} a - x = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$$

$$\frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)} = x$$

Traget aus B in E $\frac{1}{2} b$; so ist CE $= \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$. Beschreibet über AE einen halben Circul, welcher die in dem Mittelpuncte C auf gerichtete Perpendicular-Linie CD in G durchschneidet; so ist GC $= \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$. Machet CF $=$ GC; so ist in F der Brenn-Punct.

Zusatz.

245. Also ist die Weite des Brenn-Punctes von dem Mittelpuncte C $= \sqrt{(\frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} ab)}$, das ist die mittlere Proportional-Linie zwischen $\frac{1}{2} a$ und $\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$.

Die 24. Erklärung.

Tab. III. Fig. 27. 246. Die Perpendicular-Linie DC, welche die grössere Axe AB in zwey gleiche Theile theilet, ist die halbe kleine Axe.

Die 88. Aufgabe.

247. Aus dem gegebenen Parameter und der grossen Axe AB die kleine Axe CD zu finden. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$, $CD = \frac{1}{2}z$, so ist

$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}z^2 = a : b \text{ (§. 239).}$$

$$z^2 = ab$$

$$z = \sqrt{ab}$$

das ist:

Die kleine Axe in der Ellipsi ist die mittlere Proportional-Linie zwischen der grossen und dem Parameter.

Der 1. Zusatz

248. Derowegen ist der Parameter die dritte Proportional-Linie zu der grossen und kleinen Axe.

Der 2. Zusatz.

249. Wenn die Weite des Brenn-Punctes von der Scheitel $AF = x$ ist; so ist $ax - xx = \frac{1}{4}ab$ (§. 244). Derowegen ist das Rectangulum aus der Weite des Brenn-Punctes von der Scheitel AF in ihr Complement zur grossen Axe FB dem Rectangu- Tab. III. Fig. 27.

lo aus der grossen Axe in den vierdten Theil des Parameters gleich.

Die 89. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 27. 250. Die Verhältnis zu finden / welche die halben Ordinaten PM und pm in der Ellipsi gegen einander haben.

Auflösung.

Es sey AB $= a$, der Parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, Ap $= z$, pm $= v$, so ist

$$\left.\begin{aligned} yy &= bx - bx^2 : a \\ v^2 &= bz - bz^2 : a \end{aligned}\right\} \text{(§. 240)}$$

Derowegen ist $y^2 : v^2 = abx - bx^2 : abz - bz^2 = ax - x^2 : az - z^2 = (a-x)x : (a-z)z$, das ist, $PM^2 : pm^2 = PB.AP : pB.Ap$, nemlich

In der Ellipsi verhalten sich die Qvadrate der halben Ordinaten wie die Rectangula aus den Theilen der Axe.

Der 1. Zusatz.

251. Derowegen ist auch $DC^2 : PM^2 = CB^2 : AP.PB$, folgends $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB$ (§. 142), das ist, das Qvadrat der halben kleinen Axe verhält sich zum Qvadrate der halben grossen, wie das Qvadrat der halben Ordinate zu dem Rectangulo aus den Theilen der Axe.

Der

Der 2. Zusatz.

Tab. III.

252. Setzet demnach CP $= x$, so ist AP Fig. 27.
$= \frac{1}{2}a - x$, PB $= \frac{1}{2}a + x$, folgends $\frac{1}{4}ab$:
$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + \frac{1}{4}a^2 - x^2$. Derowegen ist

$$ay^2 = \frac{1}{4}a^2b - bx^2$$

$$y^2 = \frac{1}{4}ab - bx^2 : a$$

Der 3. Zusatz.

253. Es sey CD $= d$, AC $= r$, PC $= x$; so ist
AP $= r - x$ und PB $= r + x$, folgends AP.
PB $= r^2 - x^2 = AC^2 - PC^2$, und daher

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

$$y^2 = d^2(r^2 - x^2) : r^2$$

Also habet ihr noch eine andere Gleichung, welche die Natur der Ellipsis erkläret.

Die 90. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 27.

254. Die Grösse der Linie zu determiniren / welche aus dem Brenn-Puncte f an das Ende D der kleinen Axe gezogen wird.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, AB $= a$, so ist $fC^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ab$ (§. 245) und $DC^2 = \frac{1}{4}ab$ (§. 247) folgends $fD^2 = \frac{1}{4}a^2$ (§. 172. Geom.). Dannenhero fD $= \frac{1}{2}a =$ CB.

Zusatz.

255. Wenn euch die kleine und grosse Axe

gegeben werden, könnet ihr die Brenn-Puncte F und f gar leicht finden. Denn theilet die grosse Axe AB in zwey gleiche Theile in C, und richtet aus C die halbe kleine Axe CD perpendicular auf, so könnet ihr aus D mit der halben grossen Axe CB die Brenn-Puncte determiniren.

Tab. III. Fig. 27.

Die 91. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 31.

256. Die Grösse der geraden Linien FM und fM zu finden/welche aus beyden Brenn-Puncten F und f an das Ende M einer Semiordinate PM gezogen werden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$, $Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$. Nun ist (§. 251).

$$BC^2 : DC^2 = AP \cdot PB : PM^2$$

das ist, $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$

Solchergestalt ist

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$
$$PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$FM^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Wie-

Wiederumb

$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$
$Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$

$fM^2 = c^2 + ac - 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$

$fM = \frac{1}{2}a + c - 2cx : a$
$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$

$fM + FM = a = AB$, nemlich

In der Ellipsi sind die beyden Linien fM und FM / welche aus den Brenn-Puncten F und f an einen Punct M in der Peripherie gezogen werden / zusammen genommen der grossen Axe AB gleich.

Zusatz.

257. Daher könnet ihr gar leicht aus der gegebenen grossen und kleinen Axe die Ellipsin beschreiben. Denn suchet die Brenn-Punete F und f, und schlaget in ihnen zwey Nägel ein. Bindet an die Nägel einen Faden FMf, der so lang ist als die grosse Axe AB. Dehnet den Faden mit einem Stifte aus, und führet den Stift an dem Faden herumb, so wird die Ellipsis beschrieben. Tab. III. Fig. 31.

Die 1. Anmerckung

258. Ausser der Ellipsi des Apollonii, welche von dem ersten Geschlechte ist / könnet ihr noch unziehlich viel andere von höheren Geschlechtern erdencken / welche unter der allgemeinen Gleichung begriffen werden: $ay^{m+n} = bx^n$

$bx^m (a-x)^n$. Es ist nemlich in allen wie der Parameter zu der grossen Axe / also die Dignität der halben Ordinate deren Exponente den Exponenten der Dignitäten von den Theilen der Axe zusammen gleich ist/zu dem Producte aus diesen Dignitäten. Z. E. In der Ellipsi von dem anderen Geschlechte ist $b:a = y^3 : x^2 (a-x)$; in der Ellipsi von dem vierdten Geschlechte $b:a = y^4 : x^2 (a-x)^2$.

Die 2. Anmerckung.

259. Wenn die grosse Axe der kleinen gleich wird / so wird aus der Ellipsi ein Circul. Denn alsdenn ist $\frac{1}{4} ab = \frac{1}{4} a^2$ (§. 247) und daher $b = a$, folgends an stat a $y^2 = abx - bx^2$ bekommet ihr $ay^2 = a^2x - ax^2$ das ist / $y^2 = ax - xx$, welche Gleichung den Circul erkläret. Wie man nun aber Ellipses von höheren Geschlechtern hat / also giebet es auch Circul von höhereu Geschlechtern / wenn ihr nemlich setzet $AP^m : PM^m = PM : PB$, das ist / $x^m : y^m = y : a-x$. Also ist die Gleichung für unendliche Circul $ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$. Z. E. Wenn $m = 1$, so ist $ax - x^2 = y^2$ für den Circul des ersten Geschlechtes; ist $m = 4$, so ist $ax^4 - x^5 = y^5$ die Gleichung für den Circul von dem vierdten Geschlechte.

Tab. II. Fig. 19.

Die 25. Erklärung.

260. Die Hyperbel ist eine krumme Linie / in welcher $ay^2 = abx + bxx$, das ist / wie eine unveränderliche Linie b / welche der Parameter heisset / zu einer anderen unveränderlichen Linie a / welche die Zwerch-Axe (Axis transversus) genennet wird / so das Qvadrat der Semiordinate

y^2 zu dem Rectangulo aus der Summe der Abscisse und Zwerch-Axe $a+x$ in die Abscisse.

Zusatz.

261. Derowegen ist $y^2 = bx + bx^2 : a, b = ay^2 : (ax+xx)$, $a = bx^2 : (y^2 - bx)$ u. s. w. wie in der Ellipsi, nur daß ihr das Zeichen + an stat des Zeichens — habet.

Die 26. Erklärung.

262. Weil die Gleichung der Hyperbel mit der Gleichung für die Ellipsin übereinkommet / so nennet man auch hier die mittlere Proportional-Linie zwischen der Zwerch-Axe und dem Parameter die kleine Axe.

Die 27. Erklärung

263. Wenn ihr die Axe der Hyperbel AX über ihre Scheitel A verlängert / und AB der Zwerch-Axe gleich machet / so heisset der Punct C / durch welchen AB in zwey gleiche Theile getheilet wird, der Mittelpunct. Tab.IV. Fig. 32.

Die 92. Aufgabe.

264. Aus dem gegebenen Parameter und der Zwerch-Axe AB die Weite des Brennpunctes F von der Scheitel A zu finden. Tab.IV. Fig. 32.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$ so ist $FR = \frac{1}{2}b$ (§. 229) und (§. 260)

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + xx \qquad b$$

$$\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Machet $BE = \frac{1}{2}b$, so ist $EC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Richtet in C einen Perpendicul auf und beschreibet über EA einen halben Circul; so ist $CG = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Machet $CF = CG$, so ist in F der Brenn-Punct.

Tab. IV. Fig. 32.

Der 1. Zusatz.

265. Also ist die Weite des Brenn-Punctes von dem Mittelpuncte $FC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$.

Der 2. Zusatz.

266. Weil $ax + xx = \frac{1}{4}ab$, und $ax + xx = AF.FB$, hingegen $\frac{1}{4}ab$ das Quadrat der halben kleinen Axe CD (§. 262); so ist $AF.FB = CD^2$.

Die 93. Aufgabe.

267. Die Verhältnis zu finden/ welche die Semiordinaten PM und pm gegen einander haben.

Tab. IV. Fig. 32.

Auf-

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe AB $=a$, der Parameter $=b$, AP $=x$, PM $=y$ Ap $=v$, pm $=z$, so ist $y^2 : z^2 = (bx + bxx : a) : (bv + bv^2 : a) = ax + xx : av + vv = (a+x)x : (a+v)v$ das ist, $PM^2 : pm^2 = PB.AP : pB.Ap$, nemlich

Die Qvadrate der Semiordinaten verhalten sich wie die Rectangula aus den Abscissen und der Zwerch-Axe in die Abscissen.

Die 94. Aufgabe.

268. Die Verhältnis zu finden/welche das Qvadrat der Zwerch-Axe zu dem Qvadrate der kleinen Axe hat.

Auflösung.

Das Qvadrat der Zwerch-Axe ist aa, der kleinen Axe aber ab (§. 262). Also verhält sich jenes zu diesem wie aa zu ab, das ist, wie a zu b (§. 144) oder die Zwerch-Axe zu dem Parameter.

Zusatz.

269. Weil $b : a = PM^2 : AP.PB$, (§. 260); so ist auch das Qvadrat der kleinen Axe zu dem Qvadrate der Zwerch-Axe wie das Qvadrat der Semiordinate zu dem Rectangulo aus der Abscisse in die Summe aus der Abscisse und der Zwerch-Axe. Tab. IV. Fig. 32.

Die

Die 95. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 33. 270. Es seyn zwey Hyperbeln von gleicher Grösse/ die also einen Parameter/ eine Zwerch-Axe und eine kleine Axe haben, einander entgegen gesetzet in der Weite ihrer Zwerch-Axe AB. Ziehet aus beyder Brenn-Puncte f und F gegen einen Punct einer Hyperbel M zwey gerade Linien fM und FM. Ihr sollet ihre Grösse finden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $AF = c - \frac{1}{2}a$, $Af = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa$, $Pf^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$. Nun ist (§. 266) $CD^2 = cc - \frac{1}{4}aa$ u. (§. 268 269) $AC^2 : CD^2 = AP \cdot PB : PM^2$

das ist, $\frac{1}{4}aa : cc - \frac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$

Demnach ist

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4ccxx : a^2$$
$$PF^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa$$

$$FM^2 = cc - 2cx - ac + \frac{1}{4}aa + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$$

Wiederumb

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$Pf^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$$

$$fM^2 = cc + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

fM

$fM = c + \frac{1}{2}a + 2cx : a$
$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$

$fM - FM = a = AB.$

Zusatz.

271. Hieraus fliesset folgende Manier die Hyperbel zu beschreiben. Auf eine gerade Linie ZX traget die Zwerch-Axe AB und aus A in F / ingleichen aus B in f die Weite des Brenn-Puncts von der Scheitel (§. 264). Schlaget in F und f Nägel ein. Bindet an den Nagel F einen Faden FMC und mit seinem anderen Ende an das eine Ende eines Linials fC / welches umb die Zwerch-Axe AB länger als der Faden ist. Hänget das Lineal mit dem anderen Ende an den Nagel in f. Drücket den Faden mit einem Stifte an das Lineal und schiebet es fort / so wird er die Hyperbel beschreiben. Tab. IV. Fig. 33.

Anders.

Traget auf eine gerade Linie die Zwerch-Axe AB und ferner aus B in f und aus A in F die Weite des Brenn-Puncts von der Scheitel (§. 264). Ziehet aus f nach Gefallen die Linie f VII und traget aus f in L die Länge der Zwerch-Axe BA. Beschreibet aus f mit beliebiger Eröffnung des Circuls die Bogen 1.1, 2.2, 3.3, u. s. w. und durchschnei- Tab. IV. Fig. 32.

schneidet sie aus F mit LI, LII, LIII u. s. w. in 1. 2. 3. u. s. w. so sind die Puncte 1. 2. 3 &c. in der Hyperbel.

Die 28. Erklärung.

272. Wenn ihr die kleine Axe DE an die Scheitel der Hyperbel A rechtwinckligt setzet und aus dem Mittelpuncte C durch ihre beyden Ende D und E die geraden Linien GR und Cr ziehet; so werden dieselben die Asymptoten genennet.

Tab. IV. Fig. 34.

Der 1. Zusatz.

273. Weil CA : AE = CP : Pr und CA : DA (=AE) = CP : PR (§. 184. Geom.); so ist PR = Pr (§. 70. Arithm.), folgends, da PM = Pm, auch MR = mr (§. 31. Arithm.).

Der 2. Zusatz.

274. Wenn AI mit CR parallel gezogen wird; so ist EA : ED = AI : DC (§ 184. Geom.), folgends da EA = $\frac{1}{2}$ ED (§. 272), auch AI = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}$ CE. Weil nun ferner EA : ED = EI : EC (§. 184. Geom.), und daher EI = $\frac{1}{2}$ EC = CI; so ist auch AI = CI (§. 28. Arithm.).

Die 29. Erklärung.

275. Das Qvadrat der Linie AI oder CI wird die Potenz der Hyperbel genennet.

Die

Die 96. Aufgabe.

276. Die Grösse der Potentz der Hyperbel zu finden.

Auflösung.

Es sey $CA = \frac{1}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}c$; so ist $CE = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ (§. 172. Geom.), und daher $CI = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$, folgends $CI^2 = (a + c^2) : 16$, nemlich die Potentz der Hyperbel ist dem vierdten Theile der Quadrate der beyden halben Axen gleich. Tab IV. Fig. 34.

Die 97. Aufgabe.

277. Den Unterscheid zwischen den Quadraten PM und PR zu finden. Tab IV. Fig. 34.

Auflösung.

Weil $CA : DA = CP : PR$ (§. 184. Geometr.) und $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 262), $CP = \frac{1}{2}a + x$, so findet ihr $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + 2x\sqrt{\frac{1}{4}ab} : a$. Derowegen ist

$$PR^2 = \tfrac{1}{4}ab + bx + bxx : a$$
$$PM^2 = \quad bx + bxx : a \quad (\S.260).$$

$$PR^2 - PM^2 = \tfrac{1}{4}ab = DA^2.$$

Zusatz.

278. Wenn ihr setzet, daß die Hyperbel mit ihrer Asymptote zusammen stosse, so fället der Punct R auf M und ist $PR^2 = P$

M^2

M^2, folgends $PR^2 - PM^2 = o$. Allein $PR^2 - PM^2 = DA^2$. Darumb ist $DA^2 = o$. Da nun dieses ungereimt ist, so kan die Asymptote mit der Hyperbel niemahls zusammen kommen.

Die 98. Aufgabe.

Tab.IV. Fig. 34

279. Die Grösse des Rectanguli aus MR in Mr zu finden.

Auflösung.

Es sey $PR = c$, $MP = y$, so ist $MR = c - y$, $mR = y + c$, folgends $MR \cdot mR = c^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$, nemlich

Das Rectangulum aus MR in mR ist gleich der Differenz der Quadrate von PR und PM.

Zusatz.

280. Weil $PR^2 - PM^2 = DA^2$ (§. 277), so ist $mR \cdot MR = DA^2$.

Die 99. Aufgabe.

Tab.IV. Fig. 34.

281. Wenn QM und sm mit der einen Asymptote Cr, hingegen qm und SM mit der anderen CR parallel gezogen wird, die Verhältnis der Rectangulorum aus QM in MS und qm in ms zu finden.

Auflösung.

Es sey $RM = mr = a$, $Rm = rM = b$, $MQ = v$, $mq = z$. Nun ist (§. 184. Geom.)

RM

RM:MQ = Rm:mſ
$a : v = b : (bv : a)$
rm : mq = rM : MS
$a : z = b : (bz : a)$

Derowegen iſt MQ. MS = $bvz : a$ und mq. mſ = $bvz : a$, folgends MQ. MS = mq. mſ, das iſt,

Die Rectangula aus MQ in MS und mq in mſ ſind einander gleich.

Die 100. Aufgabe.

282. Die Verhältnis des Rectanguli aus qm in ms zu der Potentz der Hyperbel zu finden. Tab. IV. Fig. 34.

Auflöſung.

Es ſey mr = z, qm = y, AE = c; ſo ſind wegen der Parallel-Linien AE und Pr die Winckel CEA und qrm, und wegen der Parallelen AI und qm die Winckel AIE und mqr einander gleich, (§. 97. Geom.) folgends (. 183. Geom.)

mr : qm = AE : AI
$z : y = c : (cy : z)$

Wiederumb weil mR. mr = AE^2 (§. 280); ſo iſt

mr : AE = AE : mR
$z : c = c : (c^2 : z)$

Endlich wegen der Parallel-Linien ſm und

CE ist $o \sqsupseteq x$ und wegen der Parallelen DE und Rm $x \sqsupseteq y$ (§. 97. Geom.), folgends $o \sqsupseteq y$ (§. 28. Arithm.): Wegen der Parallelen AI und CR aber ist IAE $\sqsupseteq$ CDE, und wegen der Parallelen DE und Rm CDE $\sqsupseteq$ ſRm (§. 97. Geom.), folgends IAE $\sqsupseteq$ ſRm (§. 28. Arithm.). Daher (§. 183. Geom.)

$$AE : IE \sqsupseteq mR : ſm$$
$$c : \frac{cy}{z} \sqsupseteq \frac{cc}{z} : \frac{c^2y}{z^2}$$

Solchergestalt ist ſm. qm $\sqsupseteq c^2y^2 : z^2$. Da nun auch $AI^2 \sqsupseteq c^2y^2 : z^2$; so ist ſm. qm $\sqsupseteq AI^2$, das ist,

Das Rectangulum aus ſm, oder Cq, in qm ist der Potentz der Hyperbel gleich.

Der 1. Zusatz.

283. Es sey CI $\sqsupseteq$ AI $\sqsupseteq a$, Cq $\sqsupseteq x$, qm $\sqsupseteq y$; so ist $xy \sqsupseteq aa$ die Gleichung, welche die Natur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten erkläret.

Tab. IV. Fig. 34.

Der 2. Zusatz

284. Wenn demnach die Asymptoten BA und AC nebst der Potentz der Hyperbel DE^2 gegeben werden; so könnet ihr die Hyperbel beschreiben. Ziehet nemlich durch E die Linie FG mit AC und PN mit DE parallel. Ziehet ferner aus A in N eine gerade Linie AN

Tab. IV. Fig. 35.

und

und HM mit AC parallel; so ist der Punct M in der Hyperbel. Denn AP:PN = AD: DH (§. 184. Geom.)

folgends $\frac{x:a = a:y}{a^2 = xy}$

Der 3. Zusatz.

285. Die Gleichung für unendliche Hyperbeln ist $a^{m+n} = x^n y^m$.

Anmerckung.

286. Eben so könnet ihr eine Gleichung für unendliche Hyperbeln in Ansehung der Axe finden $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$, deren Beschreibung Intieri in aditu ad nova arcana Geometrica detegenda lehret pag. 36. & seq. Es ist aber zu mercken / daß nach seiner Manier die Hyperbeln von einem höheren Geschlechte niemahls beschrieben werden können / man habe denn zuvor alle niedrigeren beschrieben. Eine andere leichtere Manier zeige ich in den Actis Eruditorum A. 1717.

Der 4. Zusatz.

287. Wenn ihr wie vorhin AD = DE = a, AI = b, IP = x, PM = y setzet; so ist AP = $b+x$, folgends $a^2 = by+xy$. Tab. IV. Fig. 35.

Die 30. Erklärung

288. Eine gleichseitige Hyperbel wird genennet / in welcher die beyden Axen AB und DE einander gleich sind. Tab. IV. Fig. 34

Der 1. Zusatz.

289. Also ist auch der Parameter der Axen AB gleich (§. 262.)

Der 2. Zusatz.

290. Wenn man in der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = bx + bx^2 : a$ demnach $a = b$ setzet; so kommet die Gleichung für die gleichseitige $y^2 = bx + x^2$.

Der 3. Zusatz

Tab. IV. Fig. 34.

291. Weil CA = AE; so ist der Winckel ACE 45°, folgends der Asymptoten-Winckel RCr ein rechter Winckel.

Anmerckung.

292. Damit nun erhelle / daß die Parabel / Ellipsis und Hyperbel aus einem Kegel sich schneiden lassen / und also die Kegelschnitte der Alten sind; so wil ich folgende drey Aufgaben noch hinzusetzen.

Die 101. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 36.

293. Die Natur der krummen Linie zu finden / die herauskommet / wenn man den Kegel ABC dergestalt schneidet / daß die Axe des Schnittes DE mit der Seite des Kegels CA parallel ist.

Auflösung.

Es sey HI mit AB und PM mit EN parallel, AE = HP = v, PI = t, DP = x, DE = z; so ist (§. 184. Geom.)

DP : DE = PI : EB

$x : z = t : (tz : x)$

und PM^2 = HP. PI (§. 198) = tv, EN^2 = AE. EB = $tzv : x$, folgends

PM^2

$PM^2 : EN^2 = tv : (tzv : x)$
$= x : z$
$= DP : DE$

Solchergestalt ist DLN eine Parabel (§. 231).

Die 102. Aufgabe.

294. Die Natur der krummen Linie zu finden / die entstehet / wenn ein Kegel BCA dergestalt geschnitten wird / daß die Axe des Schnittes DE den Diameter der Grund-Fläche durchschneidet / so sie beyde verlängert werden. Tab. IV. Fig. 37.

Auflösung.

Es sey $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$; so ist $PE = a - x$, $QE = a - v$ und weil IH mit LK parallel,

$DP : PH = DQ : QK$ (§. 184. Geom.)
$x : t = v : (vt : x)$
$EQ : QL = EP : PI$
$a - v : s = a - x : \frac{as - sx}{a - v}$

Demnach ist $PM^2 = HP . PI = (tsa - tsx) : (a - v$ und $QN^2 = KQ . QL = vts : x$, folgends

$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa - tsx}{a - v} : \frac{vts}{x}$
$= ax - x^2 : av - v^2$

Solchergestalt ist die Linie DLEND eine Ellipsis (§. 250).

Die 103. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 38. 295. Die Natur der krummen Linie zu finden, welche entstehet, wenn ein Kegel ACB dergestalt geschnitten wird, daß die Axe des Schnittes DQ die Seite des Kegels AC schneidet, wenn beyde verlängert werden.

Auflösung.

Es sey $ED = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $PI = f$; so ist $EP = a + x$, $EQ = a + v$, und (§. 184. Geom.)

$$EP : PH = EQ : AQ$$
$$a + x : t = a + v : \frac{at + tv}{a + x}$$

$$DP : PI = DQ : QB$$
$$x : f = v : \frac{fv}{x}$$

Demnach ist $PM^2 = HP . PI = tf$ und $QN^2 = AQ . QB = (atfv + v^2ft) : (ax + x^2)$, folgends

$$PM^2 : QN^2 = tf : \frac{atfv + v^2ft}{ax + x^2}$$
$$= ax + x^2 : av + v^2$$

Solchergestalt ist die Linie DLNMD eine Hyperbel (§. 207).

Die 31. Erklärung.

296. Es sey eine gerade Linie BD, welche

che mitten in E von einer anderen AC rechtwincklicht durchschnitten wird. Ziehet aus C durch DB so viel gerade Linien als ihr wollet / und machet überall QM = EA. Die Linie, welche durch alle Puncte M gehet / ist die Muschel-Linie (CONCHOIS oder CONCHILIS) des Nicomedis. Tab.V. Fig.39. Dergleichen Linie entstehet auch unten / wenn man überall QN = EF machet.

Der 1. Zusatz.

297. Weil QM mit DB immer einen schiefern Winckel machet, je weiter sie von EA wegkommet; so muß die Conchois der geraden Linie DB immer näher kommen.

Der 2. Zusatz.

298. Doch weil QM niemahls zu einem Puncte werden kan, sondern vielmehr immer einerley Länge behält; so können auch die Puncte Q und M niemahls zusammen stossen, folgends kan die Conchois niemahls mit der Linie DB zusammen kommen. Und also ist DB ihre Asymptote.

Die 104. Aufgabe.

299. Eine Gleichung zu finden / welche die Natur der Muschel-Linie erkläret.

Auflösung.

Es sey $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$; so ist $CP = b + x$ und (§. 184. Geom.)

$$PE : MQ = EC : CQ$$
$$x : a = b : (ab : x)$$

Daher $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$, folgends weil $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 172. Geom.), $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$ das ist, $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$, welche Gleichung die Natur der oberen Muschel-Linie MAM erkläret.

Es sey $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$, so ist $GC = b - x$ und (§. 184. Geom.)

$$EG : QN = GC : CN$$
$$x : a = b - x : (ab - ax) : x$$

Daherweil $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 172. Geom.) $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, das ist; $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$, welche Gleichung die Natur der unteren Muschel-Linie NFN erkläret.

Die 32. Erklärung.

300. Wenn man die Semiordinaten des Circuls PM verlängert und auf die Sehnen AM perpendicul AN aufrichtet, die sie in N durchschneiden; so kommet die krumme

Tab. IV. Fig. 40.

me Linie heraus / welche Diocles vor diesem CISSOIDEM genennet.

Der 1. Zusatz.

301. Weil BP : PM = PM : PA (§. 210 Geom.) und PM : PA = PA : PN (§. 210 Geom.); so sind die vier Linien BP, PM, AP und PN in einer steten Proportion. Tab. IV. Fig. 40.

Der 2. Zusatz.

302. Es sey $AB = a$, $PN = y$, $AP = x$, so ist $PB = a - x$. Da nun

$$BP^2 : PM^2 = AP^2 : PN^3$$

so ist $a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$

das ist $a - x : x = x^2 : y^2$

folgends $x^3 = ay^2 - xy^2$

Der 3. Zusatz.

303. Wenn $x = a$ und also $BD = y$, so ist $a^3 = oy^2$, folgends $o : 1 = a^3 : y^2$ und demnach BD in Ansehung AB unendlich groß, das ist, die Asymptote von der CISSOIDE.

Die 33. Erklärung.

304. Theilet einen Quadranten eines Circuls ABC in so viel gleiche Theile als euch beliebet. In eben so viel Theile theilet den halben Diameter AB in I. II. III. u.s.w. Tab. V. Fig. 41.

w. Richtet aus diesen Puncten Perpendicular-Linien auf / und ziehet aus dem Mittelpuncte A in die Theilungs-Puncte des Bogens die Linien A1 / A2 / A3 u. s. w. welche die perpendicular-Linien in a. b. c. d. e. durchschneiden. Die krumme Linie / welche durch die Puncte a. b. c. &c. gehet / wird die QVADRATRIX des Dinostratis genennet.

Zusatz.

305. Derowegen ist allezeit wie der ganze Bogen BC zu dem Bogen C4, so AB zu AIV. Es sey $BC = b$, $AB = a$, $C4 = x$, $AIV = y$, so ist $ax = by$.

Die 34. Erklärung.

Tab. V. Fig. 42.

306. Theilet eine Linie Ap in lauter gleiche Theile / und richtet aus den Theilungs-Puncten A / P / p &c. Perpendicular-Linien auf AN / PM / pm &c. die in einer geometrischen Proportion abnehmen. Die krumme Linie / welche durch die Puncte N / M / m &c. gehet / wird die Logarithmische genennet.

Zusatz.

307. Es sind demnach die Abscissen AP die Logarithmi der Semiordinaten PM.

Anmerckung.

308. Hugenius hat zu Ende seines Discurses sur la pesanteur, verschiedene Eigenschaften dieser Linie beschrieben /

ben / welche *Guido Grandus* in einem besonderen Buche demonstriret / welches er unter dem Titul Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam seu Logarithmicam Lineam zu Florentz 1701. in 4. herausgegeben. Es können noch andere Arten der Logarithmischen Linien erdacht werden. So hat man eine Logarithmische Spiral-Linie erfunden / da der Qvadrant AB in gleiche Theile getheilet wird / und aus dem Mittelpuncte C gegen die Theilungs-Puncte des Bogens die Radii C1, C11, C111 &c. gezogen / von ihnen aber in geometrischer Proportion die Linien C1, C2, C3 &c. abgeschnitten werden / durch deren Ende 1. 2. 3. ꝛc. die verlangte Linie gehet. Tab. V. Fig. 43.

Die 35. Erklärung

309. **Wenn sich ein Circul auf einer Linie AC fort beweget / bis er sich ganz überworffen hat / so beschreibet der Punct a die Linie ABC / welche CYCLOIS oder die Rade-Linie genennet wird.** Tab. V. Fig. 44.

Zusatz.

310. Es ist also die Linie AC der Peripherie des Circuls und überhaupt eine jede Semiordinate PM dem Bogen M*a* gleich. Denn die gerade Linie Ad ist dem Bogen Pd, und daher der übrige Bogen Pb, folgends auch der Bogen BM der Linie dD gleich. Nun ist OD $=$ ML (§. 22. Geom.) $=$ PN (§. 122. Geom. §. 2. Trig.). Derowegen da NM $=$ dO, so ist auch PN + MN $=$ Od + OD, das ist PM $=$ dD. Folgends ist die Semiordinate PM dem Bogen Pb, oder ihrer Abscisse BM gleich.

Die 36. Erklärung

Tab.IV. Fig.39. 311. Wenn die Peripherie des Circuls A PA, in gleiche Theile getheilet wird / und man den Radium CA in eben so viel Theile theilet/nach diesen CM einen/Cm zweyen ꝛc. solchen Theilen gleich machet; so sind die Puncte M / m &c. in der Spiral-Linie des Archimedis. Diese Linie kan nach Gefallen unendlich verlängert werden durch Hülffe neuer Circul / die mit dem zwiefachen / dem dreyfachen ꝛc. Radio beschrieben werden.

Zusatz.

312. Es sey die Peripherie $= p$, AC $= r$, AP $= x$, PM $= y$; so ist CM $= r - y$, folgends $pr - py = rx$. Wenn aber CM $= y$; so ist $py = rx$, und demnach für unendliche Spiral-Linien $r^n x^m = p^n y^m$.

Anmerckung.

313. Bißher habe ich die leichtesten Regeln der Algebra von den niedrigsten Gleichungen erkläret / und bey allerhand Aufgaben angebracht. Nun wil ich die übrigen vornehmen / welche man in Auflösung der höheren Gleichungen von nöthen hat.

Von der Natur der Gleichungen.

Die 37. Erklärung.

314. Die Wurtzel ist der Werth der unbekandten Grösse in einer Gleichung. Und ist es eine wahre Wurtzel / wenn

sie

sie das Zeichen + hat / Z. E. wenn $x =$ + 3; hingegen eine falsche Wurzel/wenn sie das Zeichen — hat. Z. E. wenn $x =$ — 3.

Die 105. Aufgabe.

315. Die Natur der Gleichungen und ihre vornehmste Eigenschaften zu untersuchen.

Auflösung.

1. Nehmet so viel Werthe von x an als euch beliebet, formiret daraus einfache Gleichungen, und bringet sie auf o.
2. Multipliciret die einfachen Gleichungen in einander, so werden die höheren heraus kommen / deren Betrachtung euch ihre Eigenschaften offenbahren wird.

Es sey $x = 2$ $x = a$

$x = -3$ $x = -b$

$x = 4$ $x = c$

so ist $x - 2 = o$ $x - a = o$

$x + 3 = o$ $x + b = o$

$x - 4 = o$ $x - c = o$

$x - 2 = o$ $x - a = o$

$x + 3 = o$

$x + b = o$

$+3x - 6$ $x^2 + bx - ab = o$

$x^2 - 2x$

$-ax$

$x^2 + x - 6 = o$

x-

$x-4=0$	$x-c=0$
$-4x^2-4x+24$	$x^3+bx^2-abx+abc=0$
x^3+x^2-6x	$-ax^2-bcx$
	$-cx^2+acx$
$x^3-3x^2-10x+24$	

Wenn ihr diese Gleichungen (die ihr nach Belieben auf höhere Grade erhöhen könnet) betrachtet; so werdet ihr mit dem Harriot und Cartesio wahrnehmen,

1. Die bekandte Grösse des anderen Gliedes sey die Summe aller Wurtzeln mit einem wiedrigen Zeichen; des dritten Gliedes die Summe der Producte aus zwey in zwey Wurtzeln; des vierdten die Summe der Producte aus drey in drey Wurtzeln / &c. endlich das letzte Glied das Product aus allen Wurtzeln mit einander. Z. E. in der Qvadratischen Gleichung ist die bekandte Grösse des anderen Gliedes $+1$, die Wurtzeln sind $+2$ und -3.

2. Eine jede Gleichung habe so viel Wurtzeln als das erste Glied Abmessungen hat / oder der Exponente der Dignität desselben Gliedes Einheiten in sich begreiffet. Z. E. In der Qvadratischen Gleichung ist der Exponente 2, die Zahl der Wurtzeln ist auch 2,

3. Und

3. Und zwar seyn in jeder Gleichung so viel wahre Wurtzeln als Abwechslungen der Zeichen sind; so viel falsche als einerley Zeichen auf einander folgen. Z. E. In unserer Qvadratischen Gleichung, die eine wahre Wurtzel + 2 und eine falsche — 3 hat, folgen auf einander + + und wechseln ab + —. In der Cubischen, welche zwey wahre Wurtzeln + 2 und + 4 und eine falsche — 3 hat; wechseln anfangs + —, darauf folgen auf einander — — und abermahls wechseln ab — +.

Die 1. Anmerckung.

316. Der erste und andere Satz lässet sich gar leicht aus der Art / wie die Gleichungen entstehen / demonstriren / so daß ich es für unnöthig achte / den Beweiß hieher zu setzen. Allein den dritten / welchen *Harriot* zuerst durch vielen Versuch gefunden / hat zur Zeit noch keiner überhaupt erweisen können / daher ihn auch Reynault aus seiner Analyse demonstré gar weggelassen / weil er die Regeln der Algebra demonstriren wollen.

Die 2. Anmerckung.

317. Ihr dörffet euch nicht wundern / daß eine einige Gleichung so gar verschiedene Wurtzeln haben kan. Denn es ist zu wissen / daß eine einige Aufgabe öfters verschiedene Fälle haben kan / und wir in jedem Falle auf einerley Gleichung verfallen. Doch weil unterweilen einige Fälle unmöglich werden / so muß auch die Gleichung unmögliche Wurtzeln haben. Wie viel aber in jedem Falle unmögliche Wurtzeln sind / hat zwar *Newton* in seiner Arithmetica Universali p. 242. zu zeigen einiger massen sich bemühet; doch weil weder die Regel allgemein ist / noch auch er die Demonstration hinzu setzet / so wollen wir uns damit nicht aufhalten / zumahl da man sie auch in den Leipziger Actis A. 1708. p. 522, 523. findet.

Die

Die 106. Aufgabe.

318. Die Wurtzel einer gegebenen Gleichung umb eine gegebene Grösse zu vermehren oder zu vermindern, unerachtet man sie noch nicht erkandt hat.

Auflösung.

Es sey die gegebene Æquation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Ihr sollet die Wurtzel umb 3 vermehren. Setzet

$$x + 3 = y$$

so ist $x = y - 3$

$$x^2 = y^2 - 6y + 9$$

x^3	$=$	$y^3 - 9y^2 + 27y - 27$
$-6x^2$	$=$	$-6y^2 + 36y - 54$
$+13x$	$=$	$+13y - 39$
-10	$=$	-10

$$y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0$$

Eine neue Gleichung, darinnen $y = x + 3$.

Wenn ihr in der Gleichung die Wurtzel umb 3 vermindern sollet, so setzet

$$y - 3 = x$$

$$y = x + 3$$

$$y^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$y^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

-15

$-15y^2 = -15x^2-90x-135$
$+76y = +76x+228$
$-130 = -130$

$x^3-6x^2+13x-10=0$

Eine neue Gleichung, darinnen $x=y-3$.

Die 107. Aufgabe.

319. Die Wurzel in einer Gleichung durch eine gegebene Grösse zu multipliciren.

Auflösung.

Ihr sollet in der Gleichung $x^3-px^2+qx-r=0$ die Wurzel durch a multipliciren. Setzet

$$ax=y$$

so ist $x=y:a$
$x^2=y^2:a^2$
$x^3=y^3:a^3$
$-px^2=-py^2:a^2$
$+qx=+qy:a$
$-r=-r$

$y^3:a^3-py^2:a^2+qy:a-r=0$

a^3

$y^3-apy^2+a^2qy-a^3r=0$, eine neue Gleichung, in welcher $y=ax$.

Zusatz.

320. Hieraus erhellet, daß ihr nur die

vorgegebene Gleichung durch eine geometrische Progreßion multipliciren dörffet, deren erstes Glied 1, der Exponente aber diejenige Zahl ist, durch welche die Wurtzel multipliciret werden sol. Z. E. Es sol in der Gleichung $x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$ die Wurtzel durch 2 multiplicirei werden: so verfahret also.

$$x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$

$$y^4+8y^3-76y^2-848y-1920=0$$

Eine Gleichung, darinnen $y=2x$.

Wiederumb es sol in der Gleichung $x^4+qx^2-rx-f=0$ die Wurtzel durch c multipliciret werden. Verfahret also

$$x^4+qx^2-rx-f=0$$
$$1 \quad c \quad c^2 \quad c^3 \quad c^4$$

$y^4+c^2qx^2-c^3rx-c^4f=0$, eine neue Gleichung, darinnen $y=cx$.

Anmerckung.

321. Der Stern wird jederzeit in die Stelle der Glieder gesetzet, welche fehlen.

Die 108. Aufgabe.

322. Die Wurtzel in einer gegebenen Gleichung durch eine gegebene Grösse zu dividiren.

Auf-

Auflösung.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Die Wurzel sol durch a dividiret werden. Setzet

$$x : a = y$$

so ist
$$x = ay$$
$$x^2 = a^2y^2$$

$$x^3 = a^3y^3$$
$$-px^2 = -a^2py^2$$
$$+qx = +aqy$$
$$-r = -r$$

$$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0$$

$$y^3 - py^2 : a + qy : a^2 - r : a^3 = 0,$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = x : a$.

Zusatz.

323. Hieraus erhellet, daß ihr die vorgegebene Gleichung nur durch eine geometrische Progreßion dividiren dörffet, deren erstes Glied 1/ der Exponente aber diejenige Grösse ist, wodurch die Division geschehen sol. Z. E. die Wurzel von $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ sol durch 2 dividiret werden. Verfahret also:

$$x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$$
1 2 4 8 16

$$y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0$$

Eine neue Gleichung, darinnen $y = \frac{1}{2}x$.

Wiederumb es sol die Wurtzel von $x^3 - 36x - 54 = 0$ durch 3 dividiret werden. Verfahret also:

$$x^3* - 36x - 54 = 0$$
1 3 9 27

$y^3 - 4y - 2 = 0$, eine neue Gleichung, darinnen $y = \frac{1}{3}x$.

Die 109. Aufgabe.

324. Eine Gleichung / darinnen einige Glieder fehlen / vollständig zu machen.

Auflösung.

Vermehret die Wurtzel umb so viel als ihr wollet oder vermindert sie (§. 318): so ist geschehen, was man verlangete.

Z. E. Es sey $x^3* - 23x - 70 = 0$. Setzet

$$x + 1 = y$$

so ist $x = y - 1$

$$x^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$
$$-23x = -23y + 23$$

-70

$$-70 = \quad -70$$

$$y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = o$$

Eine neue Gleichung, darinnen kein Glied fehlet und $y = x + 1$

Die 110. Aufgabe.

325. Aus einer gegebenen Gleichung das andere Glied weg zu schaffen.

Auflösung.

Wenn das andere Glied das Zeichen + hat, so vermehret; hat es aber das Zeichen —, so vermindert die Wurtzel (§. 318) durch den Quotienten, der heraus kommet, so man die bekandte Grösse des anderen Gliedes durch den Exponenten des ersten dividiret.

Z. E. Ihr sollet aus der Gleichung $x^3 - 8x^2 - x + 8 = o$ das andere Glied wegnehmen.

Setzet $x - 8 : 3 = y$

so ist $x = y + 8 : 3$

$x^2 = y^2 + 16y : 3 + 64 : 9$

$x^3 = y^3 + 8y^2 + 192y : 9 + 512 : 27$

$-8x^2 = -8y^2 - 128y : 3 - 512 : 9$

$-x = -y - 8 : 3$

$+8 = +8$

$y^3 * - 67y : 3 - 880 : 27 = o$

Eine neue Gleichung, darinnen das andere Glied fehlet und $y = x - 8:3$.

Zusatz.

326. Wenn ihr also aus einer Quadratischen Gleichung das andere Glied wegnehmet; könnet ihr solche noch auf eine andere Art, als vorhin geschehen, auflösen. Z.E.

Es sey $x^2 - 8x + 15 = 0$. Setzet $x - 4 = y$;

so ist $x = y + 4$

$$x^2 = y^2 + 8y + 16$$
$$-8x = -8y - 32$$
$$+15 = +15$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = 1$$

folgends $x = 1 + 4 = 5$.

Die III. Aufgabe.

327. Aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen.

Auflösung.

Multipliciret die Wurzel durch das Product aus den Nennern aller vorkommenden Brüche, oder eine Zahl, durch welche sich die Nenner dividiren lassen. So ist geschehen, was man verlangete.

Exem-

Exempel.

$y^{3*} - 67y : 3 - 880 : 27 = 0$
1 3 9 27

$x^3 - 201x - 880 = 0.$

Eine neue Gleichung, in welcher $x = 3y$

$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - 64 = 0$
1 12 144 1728

$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = 12x$.

Die 112. Aufgabe.

328. Aus einer gegebenen Gleichung die Irrational-Grössen abzuschaffen.

Auflösung.

Unterweilen kan solches durch die Multiplication; zuweilen durch die Division geschehen. Keine Regel ist allgemein.

Exempel.

$x^4 + 2ay^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a_3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$
1 $\sqrt{2}$ 2 $\sqrt{8}$ 4

$y^4 + 4ay^2 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b_2 = 0$, eine neue Gleichung, darinnen $y = x\sqrt{2}$.

$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - aaab = 0$
1 $4^{1:3}$ $16^{1:3}$ 4

$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aaab = 0.$

Eine neue Gleichung, die gantz rational ist und deren Wurtzel $y = 4^{1:3} x = x\sqrt[3]{4}$.

$$x^3 - 2^{1:3} ax^2 + 32^{1:3} abx - a^2 b = 0$$
$$1 \quad 2^{1:3} \quad 4^{1:3} \quad 2$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}aab = 0$$

Eine neue Gleichung, die gantz rational ist und deren Wurtzel $y = x : 2^{1:3}$

Anmerckung.

329. Alles / was bisher von den Gleichungen gelehret worden / ist zu dem Ende geschehen / damit wir sie völlig auflösen / das ist / den Werth der unbekandten Grösse so wohl geometrisch / als in Zahlen finden könten; welches nun in folgendem gezeiget werden sol.

Die 113. Aufgabe.

330. Alle Rational-Wurtzeln, die in einer gegebenen Gleichung enthalten sind / zu finden.

Auflösung.

1. Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Weil 24 das Product aus allen Wurtzeln ist; (§. 315) so zerfället es in die Zahlen, durch deren Multiplication es entstehet, welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. und machet daraus folgende einfache Gleichungen $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$ ꝛc.
2. Dividiret die gegebene Gleichung durch die-

diese einfachen, denn durch die sie sich dividiren lässet, die zeigen ihre Rational-Wurtzeln (§. 315). Als $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = o$ lässt sich dividiren durch $x + 3$, derowegen ist -3 eine falsche Wurtzel von dieser Gleichung. Der Qvotient, so heraus kommet, $x^2 - 6x + 8 = o$ lässt sich ferner dividiren durch $x - 2$ und der neue Qvotient ist $x - 4$. Derowegen sind 2 und 4 zwey wahre Wurtzeln von der gegebenen Gleichung.

Anders.

Ihr dörffet auch nur die Zahlen, in welche das letzte Glied zerfället worden, nach einander in die Stelle vor x setzen: denn wenn dadurch die gantze Gleichung zernichtet wird, so ist die vor x gesetzte Zahl eine von ihren Rational-Wurtzeln (§. 315). Z. E. Es sey $x^2 - 6x + 8 = o$. Das letzte Glied 8 entstehet, wenn ihr 2 durch 4 multipliciret. Setzet $4 = x$

so ist $16 = x_2$
$-24 = -6x$
$+8 = +8$

$0 = 0$

Solchergestalt ist $+4$ eine von den Rational-Wurtzeln.

Die 1. Anmerckung.

331. Weil in der ersten Manier das viele Dividiren beschweerlich fallen würde / hat man diesen Vortheil ausgedacht. 1. Ziehet die Zahl / welche ihr versuchen wollet / von der bekandten Zahl des anderen Gliedes ab / und was herauskommet / multipliciret durch eben selbe Zahl. 2. Das Product ziehet von der bekandten Zahl in dem dritten Gliede ab / und was überbleibet / multipliciret abermahl durch mehr gedachte Zahl. 3. Das neue Product ziehet von dem vierdten Gliede ab / u. s. w. Wenn endlich bey dem letzten Gliede nichts übrig bleibet / so ist die versuchte Zahl eine von den Rational-Wurtzeln. Z. E. Ihr suchet die Rational-Wurtzeln von $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Das letzte Glied 15 lässet sich in 1. 3. 5. 15. zerfällen. Wenn ihr versuchen wollet / ob einige darunter von den Wurtzeln seyn / geschiehet es folgender Gestalt

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$
$$-1 \quad +2 \quad +15$$
$$-2 \quad -15 \quad 0$$
$$+2 \quad +15$$

$$x^2 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$
$$+3 \quad -18 \quad +15$$
$$-6 \quad +5 \quad 0$$
$$+3 \quad +3$$
$$-18 \quad +15$$

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$$
$$-5 \quad -10 \quad +15$$
$$+2 \quad -3 \quad 0$$
$$-5 \quad -5$$
$$-10 \quad +15$$

Also ist $x-1=0$, $x+3=0$, $x-5=0$, das ist 1 und 5 sind die beyden wahren Wurtzeln / 3 ist die falsche.

Die 2. Anmerckung.

332. Damit ihr aber sehet / daß dieser Vortheil aus der ersten Manier völlig genommen / und für keine besondere zu halten sey / wil ich das vorige Exempel nach der gemeinen Art rechnen.

$$\begin{array}{l|l} x-1 & x^3-3x^2-13x+15=0 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & -2x^2-13x \\ & -2x^2+2x \\ \hline & -15x+15 \\ & -15x+15 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array} \quad \left\{ x^2-2x-15 \right.$$

Die 114. Aufgabe.

333. Die Schrancken zu finden / zwischen welchen die Grösse der Wurtzeln enthalten ist.

Auflösung.

Es sey $x^3-qx+r=0$, so ist $x^3+r=qx$ und demnach qx grösser als r, folgends x grösser als $r:q$. Wiederumb qx ist grösser als x^3 / und daher q grösser als x^2, folgends x kleiner als $\sqrt{q}$. Die Schrancken der Wurtzeln in gegenwärtigem Falle sind also $r:q$ und $\sqrt{q}$.

Es

Es sey $x^3 + qx - r = o$, so ist $x^3 + qx = r$, und demnach qx kleiner als r, folgends x kleiner als $r:q$. Wiederumb r ist grösser als x^3 und daher x kleiner als $r^{1:3}$, folgends $xr^{2:3}$ grösser als x^2, und $xr^{2:3} + qx$ grösser als r, endlich x grösser als $r:(r^{2:3} + q)$. Also fället die Grösse der Wurtzel zwischen $r:q$ und $r:(r^{2:3}+q)$. Es sey $x^3 - px^2 + qx - r = o$, so ist $x^3 - px^2 = r - qx$. Wenn nun x grösser als p, so ist auch r grösser als qx und dannenhero x kleiner als $r:q$. Hingegen wenn p grösser als x ist, so ist qx grösser als r, und dannenhero auch x grösser als $r:q$. Derowegen fallen in beyden Fällen die Wurtzeln zwischen p und $r:q$.

Es sey $x^3 - px^2 - qx + r = o$, so ist $x^3 + r = px^2 + qx$, folgends $px^2 + qx$ grösser als r, und daher auch $x^2 + qx:p + qq:4pp$ grösser als $r:p + qq:4pp$, $x + q:2p$ grösser als $\sqrt{(r:p + qq:4pp)}$, endlich x grösser als $\sqrt{(r:p + qq:4pp)} - q:2p$. Wiederumb $px^2 + qx$ ist grösser als x^3, dannenhero $px + q$ grösser als x^2, und q grösser als $x^2 - px$, das ist $x^2 - px + \frac{1}{4}pp$ kleiner als $q + \frac{1}{4}pp$, $x - \frac{1}{2}p$ kleiner als $\sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$, endlich x kleiner als $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$. Die Schrancken also der Wurtzeln sind $\sqrt{(r:p + qq:4pp)} - q:2p$ und $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$.

Es sey $x^4 - qx^2 - rx - s = o$, so ist $x^4 - qx^2 = rx + s$. Demnach ist x^2 grösser als q, weil sich qx^2 von x^4 abziehen läst / und x grö-

grösser als $\sqrt{q}$. Daher $x^3\sqrt{q}$ grösser als qx^2. Wiederumb weil $x^4 - rx = qx^2 + s$, so ist x^3 grösser als r und x grösser als $r^{1:3}$, daher x^2 grösser als $xr^{1:3}$, x^3 grösser als $xr^{2:3}$, und $x^3 r^{1:3}$ grösser als rx. Endlich da $x^4 - s = qx^2 + rx$, so ist x^4 grösser als s, und x grösser als $s^{1:4}$, folgends x^3 grösser als $s^{1:4}$ und $x^3 s^{1:4}$ grösser als s. Weil nun $x^4 = qx^2 + rx + s$, so ist x^4 kleiner als $x^3\sqrt{q} + xr^{1:3} + x^3 s^{1:4}$, und deswegen x kleiner als $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$. Die Schrancken der Wurtzel in gegenwärtigem Falle sind also $\sqrt{q}$ oder $r^{1:3}$ und $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Eben so wird in anderen Fällen verfahren.

Anmerckung.

334. Damit ihr die vorgeschriebene Manier besser fassen möget/ wil ich ein Exempel in Zahlen anführen. Z. E. Es sey $x^3 - 3x + 1 = o$, so ist $q = 3$ und $r = 1$, folgends $r:q = 1:3$ und $\sqrt{q} = \sqrt{3}$. Solcher massen sind die Schrancken dieser Gleichung $\frac{1}{3}$ und $\sqrt{3}$, das ist/ die Wurtzel muß grösser als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\sqrt{3}$ seyn.

Zusatz.

335. Wenn ihr die Zahl wisset, welche grösser als eure Wurtzel ist, so werdet ihr nicht mit vergeblichen Zahlen (§. 330. 331.) versuchen, ob sie unter die Rational-Wurtzeln gehören oder nicht.

Die

Die 115. Aufgabe.

36. Aus einer cubischen Gleichung die Wurzeln zu finden.

Auflösung.

Wenn aus den cubischen Gleichungen das andere Glied weggenommen wird, so bekommet ihr drey Fälle, nemlich

$$x^3 = +px+q$$
$$x^3 = -px+q$$
$$x^3 = +px-q$$

Damit ihr nun die Wurzeln findet, so setzet

$$x = y+z$$

Dann ist $x^3 = y^3+3y^2z+3z^2y+z^3$

$$px = py+pz$$

$y^3+3y^2z+3z^2y+z^3 = py+pz+q$ im ersten Falle.

Setzet $3y^2z+3z^2y = py+pz$

$y+z$

so ist $3yz = p$

$$z = p:3y$$

Ferner ist $y^3+z^3 = q$

das ist $y^3+p^3:27y^3 = q$

$y^6+p^3:27 = qy^3$

y^6

$y^6 - qy^3 = -p : 27$
$\frac{1}{4}qq \quad \frac{1}{4}qq$ (§. 83).

$y^6 - qy^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$

$y^3 - \frac{1}{2}q = V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)$
$y = (\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3))^{1:3}$

Nun ist

$z^3 = q - y^3$

das ist $z_3 = \frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)$

$z = (\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)^{1:3}$

Demnach ist $z + y = (\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)^{1:3} + (\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)^{1:3}$ die verlangte Wurtzel in dem ersten Falle.

Eben so findet ihr für $-p$ in dem anderen Falle $(\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3))^{1:3} + (\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3))^{1:3}$.

Und in dem dritten Falle $(-\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3))^{1:3} + (-\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3))^{1:3}$.

Die 1. Anmerckung.

337. Diese Regeln werden insgemein *Cardani* Regeln genennet / weil er sie aus *Scipionis Ferrei* Erfindung zuerst in Druck gegeben.

Die 2 Anmerckung

338. Damit aber ihr Gebrauch erhelle / so wil ich eines und das andere Exempel anführen. Es sey $x^3 =$

$*6x+40$. Weil $p=6$, $q=40$, und daher $\frac{1}{2}q=20$, $\frac{1}{4}qq=400$, $\frac{1}{3}p=2$, $\frac{1}{27}p^3=8$; so ist vermöge der ersten Regel $x=(20-\sqrt{(400-8)})^{1:3}+(20+\sqrt{(400-8)})^{1:3}=(20-\sqrt{392})^{1:3}+(20+\sqrt{392})^{1:3}=$ (wenn die Cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=4$. Ist demnach 4 eine wahre Wurtzel.

Es sey $x^3=*-3x+36$. Weil $p=-3$, $q=36$, und daher $\frac{1}{2}q=18$, $\frac{1}{4}qq=324$, $\frac{1}{3}p=-1$, $\frac{1}{27}p^3=-1$; so ist vermöge der anderen Regel die Wurtzel $(18-\sqrt{(324+1)})^{1:3}+(18+\sqrt{(324+1)})^{1:3}=$ (wenn ihr die Cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausziehet) $1\frac{1}{2}-\sqrt{3\frac{1}{4}}+1\frac{1}{2}+\sqrt{3\frac{1}{4}}=3$.

Es sey $x^3=*6x-40$. Weil $p=6$, $q=-40$, und daher $\frac{1}{2}q=-20$, $\frac{1}{4}qq=400$, $\frac{1}{3}p=2$, $\frac{1}{27}p^3=8$; so ist vermöge der dritten Regel $(-20+\sqrt{(400-8)})^{1:3}+(-20-\sqrt{(400-8)})^{1:3}=(-20-\sqrt{392})^{1:3}+(-20+\sqrt{392})^{1:3}=$[wenn die Cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $-2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2=-4$. Demnach ist 4 eine falsche Wurtzel der vorgegebenen Gleichung.

Die 3. Anmerckung.

339. Man hat zwar auf eine gleiche Art eine Regel für die Wurtzeln aus einer Gleichung von dem vierdten Grade auszuziehen gefunden; allein weil sie nicht sonderlich gebraucht wird / so wil ich die Anfänger damit nicht aufhalten / sondern gehe vielmehr fort und zeige / wie man durch Näherung die Wurtzel finden kan / wenn eine Gleichung keine National-Wurtzel hat.

Die

Die 116. Aufgabe.

340. Aus einer jeden gegebenen Gleichung die Wurzel durch Näherung zu finden.

Auflösung.

Wir wollen die Regeln bald auf Exempel anwenden, und zwar den Anfang von einer qvadratischen Gleichung machen, damit wir sie desto besser begreiffen.

Es sey demnach $x^2 - 5x - 31 = 0$. Setzet vermöge der Gräntzen, welche die Gleichung haben kan §. 333), die Wurtzel sey $8 + y$, dergestalt, daß y einen Bruch bedeutet, umb welchen 8 entweder grösser oder kleiner ist als x. Solcher gestalt ist

$$x^2 = 64 + 16y + y^2$$
$$-5x = -40 - 5y$$
$$-31 = -31$$

$$-7 + 11y + y^2 = 0$$

Da nun die Dignitäten eines Bruches beständig abnehmen und man hier nur die Wurtzel beynahe wissen will, so lässet man y^2 weg und nimmet an

$$-7 + 11y = 0$$

das ist $11y = 7$

$$y = 0,6 = 0.\frac{6}{10}$$

Also ist $x = 8 + 0.6 = 8.6$

Weil der Werth von x in Zehen-Theilichen noch nicht genau genung bestimmet; so setzet $x = 8.6 + y$ und verfahret, wie vorhin. Ihr findet demnach

$$x^2 = \frac{7396}{100} + \frac{172}{10}y + y^2$$
$$-5x = -\frac{430}{10} - 5y$$
$$-31 = -31$$

$$\frac{7396}{100} - \frac{430}{10} - 31 + \frac{172}{10}y - 5y = 0$$

Das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringet (welches hier den Anfängern zugefallen einmahl für allemahl geschehen sol)

$$73.96 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y = 0$$

$$-0.04 + 12.20y = 0$$

$$12.20y = 0.04$$

$$y = 0.0032$$

Also ist $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

Wenn ihr die Wurtzel noch genauer verlanget; so setzet $x = 8.6032 + y$. Alsdenn ist

$$x^2 = 74.01505024 + 17.20640000y + y^2$$
$$-5x = -43.01600000 - 5.00000000y$$
$$-31 = -31.00000000$$

$$-0.00009497 6 + 12.20640000y = 0$$

$12.20640000y = 0.00034976$

$y = 0.000077808$

Also ist $x = 8.603277808$

Man sol ferner die Wurtzel aus der Cubischen Gleichung $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ ausziehen. Setzet

$5 + y = x$

so ist
$x^3 = 125 + 75y \ldots$
$+2x^2 = 50 + 20y \ldots$
$-23x = -115 - 23y$
$-70 = -70$

$-10 + 72y = 0$

$72y = 10$

$y = 0.1$

Also ist $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Setzet ferner $x = 5.1 + y$; so ist

$x^3 = 132.651 + 78.030y \ldots\ldots$
$+2x^2 = 52.020 + 20.400y \ldots\ldots$
$-23x = -117.300 - 23.000y$
$-70 = -70.000$

$-2.629 + 75.430y = 0$

$75.430y = 2.629$

$y = 0.0348$

Also ist $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$

Wolte man die Wurtzel noch genauer haben; so setzte man $x = 5.1348 + y$ und suchte den Werth von y, wie vorhin.

Wenn ihr die Wurtzel geschwinder in vielen Zahlen genau haben wollet; so müsset ihr noch den Werth von y^2 beybehalten und die qvadratische Gleichung auf gewöhnliche Art (§. 83.) auflösen, nur daß ihr zehentheiliche Brüche behaltet. Nemlich wenn $x = 5 + y$; so ist

$$x^3 = 125 + 75y + 15y^2$$
$$+2x^2 = 50 + 20y + 2y^2$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = -70$$

$$-10 + 72y + 17y^2 = 0$$

$$17y^2 + 72y = 10$$

$$y^2 + 4.2352y = 0.58823530$$
$$4.48422976 \quad 4.48422976$$

$$y^2 + 4.2352y + 4.48422976 = 5.07246506$$

$$y + 2.1176 = 2.2522$$

$$y = 0.1346$$

Also ist $x = 5.1346$

Woltet ihr nun setzen $x = 5.1346 + y$ und wie vorhin den Werth von y finden; so würder

der ihr gleich durch die andere Rechnung sehr weit hinauf kommen.

Die 1. Anmerckung.

341. In meinen Element. Analyf. (§. 327) habe ich gewiesen / wie auf diese Art gar leichte die Regel des Hrn. Halley heraus gebracht werde/daraus man in Engellandsehr viel machet. Allein weil die gegebene Regel eben so geschwinde den Werth der Wurtzel in so kleinen Theilen giebet / und doch viel leichter als die Hallejanische zu behalten ist / indem sie die Klarheit ihres Beweises mit sich führet; so kan man am sichersten bey derselben verbleiben.

Die 2. Anmerckung.

342. Nun könte ich auch zeigen / wie der Werth von * in den gegebenen Gleichungen geometrisch gesucht werde. Allein weil die geometrische Ausführung der determinirten Aufgaben sich am besten aus der Ausführung der undeterminirten herleiten läst; wil ich zuerst arithmetische Exempel von dergleichen Aufgaben beybringen / zumahl da sie in der höheren Geometrie und der Differential-Rechnung mehr Nutzen haben / als wohl einige vermeinen / auch besondere Kunstgriffe nachzusinnen an die Hand geben.

Von undeterminirten Aufgaben.

Die 117. Aufgabe.

343. Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden / daß die Summe der beyden ersten der dritten und ihre Differentz der vierdten Zahl gleich sey.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl x, die andere y, die dritte z, die vierdte t, so ist

$y+x=z$	$x-y=t$
$2y+t=z$	$x=t+y$
$2y=z-t$	$x=t+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}t$
$y=(z-t):2$	$x=(z+t):2$

da nun nicht mehr Gleichungen zu erdencken sind, können die Zahlen z und t nach Belieben angenommen werden. Es sey $z=8$, $t=2$; so ist $x=(8+2):2=10:2=5$, und $y=(8-2):2=6:2=3$. Es sey $z=5$, $t=1$; so ist $x=(5+1):2=6:2=3$, $y=(5-1):2=4:2=2$.

Anmerckung.

344. Wenn ihr gantze Zahlen verlanget, so müssen vor z und t solche angenommen werden, deren Summe und Differentz sich durch 2 dividiren läst.

Die 118. Aufgabe.

345. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe zugleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die gegebene Zahl $=a$, die eine von den begehrten $=x$, die andere $=y$, so ist $xy+x+y=a$

$xy+x=a-y$
$x=(a-y):(y+1)$

Es sey $a = 30$, $y = 2$, so ist $x = (30 - 2) : (2+1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Es sey $a = 20$, $y = 2$, so ist $x = (20 - 2) : (2+1) = 18 : 3 = 6$. Es sey $a = 19$, $y = 4$, so ist $x = (19 - 4) : (4+1) = 15 : 5 = 3$.

Die 119. Aufgabe.

346. Zwey Zahlen zu finden / deren Product ein vollkommener Cubus ist / dessen Wurtzel dem Producte aus der ersten in das Quadrat der anderen gleich ist.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl $= x$, die andere $= y$, die Cubic-Wurtzel $= v$, so ist

$$v = xy^2 \qquad xy = v^3$$

$$v : y^2 = x \qquad x = v^3 : y$$

$$v : y^2 = v^3 : y$$

$$vy = v^3 y^2$$

$$1 = v^2 y$$

$$1 : v^2 = y$$

Derowegen ist $v^5 = x$

Setzet $v = 2$, so ist $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Es sey $v = 3$, so ist $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

Die 120. Aufgabe.

347. Die Summe zweyer vollkommenen

Qvadrate in zwey andere vollkommene Qvadrate zu theilen.

Auflösung.

Es sey die Seite des grösten Qvadrates $= a$, des kleinesten $= b$: die Seite des einen von den gesuchten $a - z$, des anderen $yz - b$. So ist

$$aa - 2az + zz + y^2z^2 - 2byz + bb = aa + bb$$

$$zz + yyzz = 2byz + 2az$$

$$z + yyz = 2by + 2a$$

$$z = (2by + 2a) : (y^2 + 1)$$

Also ist $= a - z = a - (2by + 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 + a - 2by - 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 - 2by - a) : (y^2 + 1)$. Hingegen $yz - b = (2by^2 + 2ay) : (y^2 + 1) - b = (2by^2 + 2ay - by^2 - b) : (y^2 + 1) = (by^2 + 2ay - b) : (y^2 + 1)$. Es sey $a = 3$, $b = 2$, $y = 2$; so ist $z = (8 + 6) : 5 = 14 : 5$, folgends $a - z = 3 - 14 : 5 = \frac{1}{5}$, und $yz - b = 28 : 5 - 2 = (28 - 10) : 5 = 18 : 5$. Deren Qvadrate $(1 + 324) : 25 = 13 = 9 + 4$.

Die 121. Aufgabe.

348. Zwey vollkommene Qvadrate zu fin-

finden/deren Differenz einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die Seite des kleinen $= x$, des grossen $x+y$, die Differenz $= d$. So ist das kleine Qvadrat $= x^2$, das grosse $x^2 + 2xy + y^2$, folgends

$$y^2 + 2xy = d$$

$$2xy = d - y^2$$

$$x = (d - y^2) : 2y$$

Weil sich y^2 von d abziehen läst, so muß y kleiner seyn als $\sqrt{d}$.

Z. E. Es sey $d = 10$, $y = 3$; so ist $x = (10-9):6 = \frac{1}{6}$, $x+y = 3\frac{1}{6}$. Es sey $d = 11$, $y = 2$; so ist $x = (11-4):4 = \frac{7}{4}$, $x+y = 2\frac{7}{4} = \frac{15}{4}$.

Die 122. Aufgabe.

349. Eine Zahl in zwey andere zu zertheilen/ deren Product ein vollkommenes Qvadrat ist.

Auflösung.

Es sey die Zahl $= 2a$, die Differenz $= 2y$; so ist die grosse $a+y$, die kleine $a-y$, ihr Product $= aa - yy$. Setzet die Seite des Qvadrates $xy - a$. So ist

$$aa - yy = aa - 2axy + x^2y^2$$

$$2axy = x^2y^2 + y^2$$

$$2ax = x^2y + y$$

$$2ax : (x^2 + 1) = y$$

Es sey $x = 2$, $2a = 10$; so ist $y = 20 : 5 = 4$, $a + y = 5 + 4 = 9$, $a - y = 5 - 4 = 1$.

Es sey $2a = 10$, $x = 0$; so ist $y = 0$, folgends $a + y = 5$, $a - y = 5$.

Es sey $2a = 10$, $x = 3$; so ist $y = 30 : 10 = 3$, $a + y = 5 + 3 = 8$, $a - y = 5 - 3 = 2$.

Die 123. Aufgabe.

350. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit / daß / wenn die eine zu dem Qvadrate der anderen gesetzet wird / die Summe ein Qvadrat sey / deren Seite die Summe der Zahlen ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl x, die andere y; so ist

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2$$

$$y - y^2 = 2xy$$

$$(1 - y) : 2 = x$$

Es sey $y = \frac{1}{2}$; so ist $x = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Es sey $y = \frac{1}{3}$; so ist $x = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$.

Die 124. Aufgabe.

351. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit / daß / wenn die eine zu dem Quadrate der anderen gesetzet wird / die Summe die Seite eines Quadrates sey / so den beyden Zahlen gleich ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl z, die andere y; so ist

$$z^2 + y = V(z+y)$$

$$z^4 + 2z^2y + yy = z + y$$

$$z^4 + 2z^2y - y + yy = z$$

das ist wenn $2z^2 - 1 = v$

$$vy + yy = z - z^4$$

$$\frac{1}{4}v^2 + vy + yy = \frac{1}{4}v^2 + z - z^4$$

$$\frac{1}{2}v + y = V(\frac{1}{4}v^2 + z - z^4)$$

$$y = V(\frac{1}{4}v^2 + z - z^4) - \frac{1}{2}v$$

das ist, wenn ihr für v wieder seinen Werth in die Stelle setzet

$$y = V(z^4 - z^2 + \frac{1}{4} + z - z^4) - z^2 + \frac{1}{2}$$

das ist $y = V(\frac{1}{4} + z - z^2) + \frac{1}{2} - z^2$

Wenn

Wenn ihr nun Rational-Zahlen verlanget, so muß $\frac{1}{4}+z-z^2$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Setzet demnach seine Seite $= zx-\frac{1}{2}$, so ist

$$z^2x^2-zx+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}+z-z^2$$

$$z^2x^2-zx=z-z^2$$

$$zx^2-x=1-z$$

$$zx^2+z=x+1$$

$$z=(x+1):(x^2+1)$$

Es sey $x=2$; so ist $z=(2+1):(4+1)=\frac{3}{5}$, folgends $y=\frac{1}{2}-\frac{9}{25}+\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}-\frac{9}{25})}=(25-18):50+\sqrt{((25+24:100))}=7:50+\sqrt{(49:100)}=\frac{7}{50}+\frac{7}{10}=70+350=\frac{420}{500}=\frac{21}{25}$.

500

Die 125. Aufgabe.

352. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden / daß wenn ihr das eine zu dem Producte von beyden addiret / eine jede Summe ein vollkommenes Quadrat sey.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2, so ist ihr Product x^2y^2; folgends sind $x^2y^2+x^2$ und $x^2y^2+y^2$ vollkommene Qua-

dra-

drate. Dividiret das erste durch x^2, das andere durch y^2; so sind y^2+1 und x^2+1 gleichfals vollkommene Quadrate. Nennet die Seite des ersten $z-y$, das andere $t-x$; so ist

$y^2+1=z^2-2zy+y^2$

$1=z^2-2zy$

$1+2zy=z^2$

$y=(z^2-1):2z$

$x^2+1=t^2-2tx+x^2$

$1=t^2-2tx$

$2tx=t^2-1$

$x=(t^2-1):2t$

Es sey $z=2$, $t=3$, so ist $y=(4-1):4=\frac{3}{4}$ $x=(9-1):6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Es sey $z=3$, $t=4$; so ist $y=(9-1):6=\frac{4}{3}$, $x=(16-1):8=\frac{15}{8}$.

Die 126. Aufgabe.

353. Zwey Quadrate zu finden / von der Beschaffenheit / daß / wenn ihre Summe zu ihrem Producte gesetzet wird / ein vollkommenes Quadrat heraus kommet.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2, so ist $x^2y^2+x^2+y^2$ ein vollkommenes Quadrat. Setzet anfangs

$y^2-2ty+tt=yy+1$

so ist $t^2=1+2ty$

(t2

$$(t^2-1):2t = y$$

$$t-y = t-(t^2-1):2t = (t^2+1):2t$$

Setzet ferner $v = V(yy+1) = t-y = (t^2+1):2t$; so ist $x^2y^2 + x^2 + y^2 = x^2v^2 + y^2$. Stellet dessen Seite $= z - vx$; so ist

$$x^2v^2 + y^2 = z^2 - 2vxz + v^2x^2$$

$$y^2 = z^2 - 2vxz$$

$$2vxz = z^2 - y^2$$

$$x = (z^2 - y^2):2vz$$

Hier werden z und t nach Gefallen angenommen.

Es sey z. E. $z = 2$, $t = 3$, so ist $y = (9-1):6 = 8:6 = \frac{4}{3}$, $v = t-y = 3-\frac{4}{3} = \frac{9-4}{3} = \frac{5}{3}$ und also $x = (4-\frac{16}{9}):\frac{20}{3} = \frac{(36-16)}{9}:\frac{20}{3} = \frac{20}{9}:\frac{20}{3} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$.

Die 127. Aufgabe.

354. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden / daß / wenn ihr Product zu der Summe ihrer Quadrate gesetzet wird / ein vollkommenes Quadrat heraus kommet.

Auflösung.

Es sey die Summe der beyden Zahlen

$2x$, ihre Differentz $2y$, die Seite des Qvadrates $z+y$; so ist die grosse Zahl $x+y$, die kleine $x-y$, und demnach

$x^2-y^2+x^2+2xy+yy+x^2-2xy+yy$ / das ist,

$3x^2+y^2 = z^2+2zy+yy$

$3x^2-z^2 = 2zy$

$2z$

$(3x^2-z^2) : 2z = y$

Es sey $x = 4$, $z = 6$, so ist $y = (48-36 : 12 = 12 : 12 = 1$, folgends $x+y = 4+1 = 5$ / $x-y = 4-1 = 3$.

Die 128. Aufgabe.

355. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden / daß / wenn sie durch zwey bekandte Zahlen multipliciret wird / beyde Producte ein vollkommenes Qvadrat sind.

Auflösung.

Es sey die eine gegebene Zahl $= a$, die andere b, die gesuchte x, das eine Qvadrat y^2, das andere v^2, so ist

$ax = y^2$ | $bx = v^2$

$x = y^2 : a$ | $x = v^2 : b$

$y^2 : a = v^2 : b$

$by^2 = av^2$

y^2

$$y^2 = av^2 : b$$

$$y = v\sqrt{(a:b)}$$

Wenn demnach eine Rational-Zahl gefunden werden sol, muß $a:b$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Es sey $a = 32$, $b = 8$; so ist $\sqrt{(a:b)} = 2$. Setzet $v = 5$, so ist $y = 10$, folgends $x = 100 : 32 = \frac{25}{8}$.

Die 129. Aufgabe.

356. Eine Zahl zu finden von der Beschaffenheit, daß / wenn sie durch zwey gegebene Zahlen multipliciret / und zu jedem Producte noch eine andere Zahl addiret wird / beyderseits ein vollkommenes Quadrat herauskommet.

Auflösung.

Es seyn die ersten beyden gegebenen Zahlen a und b, die anderen c und d, die gesuchte x, die beyden Quadrate yy und vv; so ist

$$ax + c = yy \qquad bx + d = vv$$

$$x = (yy - c) : a \qquad x = (vv - d) : b$$

$$(yy - c) : a = (vv - d) : b$$

$$byy - bc = avv - ad$$

byy

$$byy = av^2 - ad + bc$$

$$y^2 = (av^2 - ad + bc) : b$$

$$y = V(av^2 - ad + bc) : b$$

Wenn ihr nun eine Rational-Zahl verlanget, setzet $a : b = m^2$, so ist

$$y^2 = m^2 v^2 - m^2 d + c$$

Setzet ferner für die Seite dieses Quadrates $t - mv$ oder $mv - t$, so ist

$$m^2 v^2 - m^2 d + c = m^2 v^2 - 2tmv + t^2$$

$$2tmv = t^2 + m^2 d - c$$

$$v = (t^2 + m^2 d - c) : 2tm$$

das ist, wenn ihr für m^2 seinen Werth wieder hinsetzet $v = (bt^2 + ad - bc) : 2tbm$.

Es sey $t = 4$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, so ist $m^2 = 1 : 1 = 1$ und $m = 1$, folgends $v = (16 + 3 - 2) : 8 = 17 : 8 = 2\frac{1}{8}$ und $x = 289 : 64 - 3 = (289 - 192) : 64 = 97 : 64$

Von den geomerrischen Oertern.

Die 38. Erklärung.

357. Die Linie / durch welche eine undeterminirte Aufgabe geometrisch aufgelöset wird / heisset ein geometrischer Ort (Locus geometricus). Insbesondere nennet man es einen Ort an einer geraden Li-

nie / wenn sie eine gerade Linie ist: einen Ort an dem Circul / wenn sie ein Circul ist / einen Ort an der Parabel / Hyperbel / ELLIPSI u. s. w. wenn sie eine von diesen Linien ist.

Die 39. Erklärung.

358. Der Ort an einer geraden Linie wird ein einfacher Ort; der an einem Circul ein ebener Ort (Locus planus); der an einer Parabel / Hyperbel und Ellipsi ein cörperlicher Ort (Locus solidus) genennet.

Die 130. Aufgabe.

359. Einen Ort an einer geraden Linie zu beschreiben.

Auflösung.

Einen Ort beschreiben heisset die Linie ziehen, welche der undeterminirten Aufgabe ein Gnügen thut. Alle Oerter an einer geraden Linie lassen sich durch folgende Gleichungen vorstellen:

$$y = \frac{ax}{b} \qquad y = \frac{ax}{b} \pm c \qquad y = c - \frac{ax}{b}$$

Tab. V. Fig. 45. Ziehet also eine gerade Linie AB und machet $AI = b$. Ziehet unter einem beliebigen Winckel $EI = a$. Wenn PM, pm &c. mit EI parallel gezogen werden; so sind AP, Ap &c. $= x$, PM, pm &c. $= y$. Denn (§. 184. Geom.

AI : IE = AP : PM
$b : a = x : y$

$ax : b = y$

Verlängert EI in G, biß IG = c und ziehet durch G die Linie Dq mit AB, AD mit EG parallel. Wenn PM biß in Q verlängert wird; so ist DQ = AP = x und QM = $\frac{ax}{b} + c = y$.

Hingegen machet LG = b und GE = a, IG = c; so ist QM = $ax : b$ (§. 184. Geom.) und PM = $\frac{ax}{b} - c$.

Endlich sey AC = c und AD = b. Ziehet durch D die Linie FE mit AC parallel und machet DE = a. Ziehet ferner die Linie AL und mit ihr CB, hingegen NM mit AC parallel; so ist PN = $ax : b$ (187. Geom.), folgends PM = MN - NP = $c - ax : b$. Tab. V. Fig. 46.

Die 131. Aufgabe.

360. Einen jeden Ort an einer Parabel zu beschreiben.

Auflösung.

Es können zwey Fälle vorkommen. Denn es beziehen sich die Linien x und y entweder auf die Höhlung, oder das erhabene der Parabel.

Tab. V. Fig. 47. Im ersten Falle sey KD = PN = n, AK = p, DH = q, LH = r, DL = s, der Parameter = t, DQ = x, QM = y; so ist (§. 184 Geom.)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Demnach $AP = KP\,(= DN) - KA = \frac{sx}{q} - p$ und $PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n$,

folgends weil $t.\ AP = PM^2$ (§. 217).

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tsx}{q} - tp$$

das ist,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tsx}{q} + tp$$

Tab. V. Fig. 48. Im anderen Falle sey DK = PN = n, AK = p, DH = q, LH = r, DL = s, DQ = IM = y, QM = DI = x; so ist (§. 184) Geom.)

DH

$$DH:HL = DQ:QN$$
$$q:r = y:\frac{ry}{q}$$

$$DH:DL = DQ:DN$$
$$q:s = y:\frac{sy}{q}$$

Demnach $AP = KP\,(= DN) - AK = \frac{sy}{q} - p$ und

$PM = QM - QN - NP = x - \frac{ry}{q} - n$, folgends

weil s. $AP = PM^2$ (§. 217).

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = \frac{sy}{q} - p$$

das ist

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = 0,$$
$$- \frac{sy}{q} + p$$

Wenn ihr nun die Glieder einer gegebenen Gleichung mit denen Gliedern einer von den gefundenen vergleichet, so könnet ihr in jedem Falle finden, wie groß die Linien DK, AK, DH und LH in dem vorkommenden Falle anzunehmen sind, oder welche von ihnen gar weg bleiben, und solcher gestalt, den verlangten Ort beschreiben.

Z. E. Es sey $y^2 - ax = o$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$-\frac{2r}{q} = o$	$-\frac{2n}{n} = o$	$-\frac{ts}{q} = -a$
$r = o, q = s$	$n = o$	$t = a$

Tab. V. Fig. 47. Weil demnach LH $= o$, und DK $= o$; so fället die Linie DH auf KP und der Punct K in A, folgends DQ in AP und QM in PM, und ist weiter nichts nöthig als daß mit dem Parameter a eine Parabel beschrieben wird. Denn so ist AP $= x$ und PM $= y$.

Wiederumb es sey $y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = o$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$-\frac{2r}{q} = o$	$-2n = -a$	$-\frac{ts}{q} = -b$
$r = o, q = s$	$n = \frac{1}{2}a$	$t = b$

$$n^2 + tp = \tfrac{1}{4}aa$$

$$\tfrac{1}{4}aa + bp = \tfrac{1}{4}aa$$

$$bp = o$$

$$p = o$$

Weil demnach LH $= o$, so fället DH auf DL. Weil KA $= o$; so fället K in A. Solchergestalt wird mit dem Parameter b eine Parabel AMR beschrieben, auf der Axe AB in A

Tab. VI. Fig. 49.

ein

ein Perpendicul $AL = \frac{1}{2}a$ aufgerichtet und LQ mit AB, QM aber mit LA parallel gezogen; so ist $LQ = x$, $QM = y$. Denn weil $PM = y - \frac{1}{2}a$; so ist

$$yy - ay + \tfrac{1}{4}aa = bx \text{ (§. 217).}$$

folgends $yy - ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$

Es sey $yy - ay - bx - cc = 0$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$-\frac{zr}{q} = 0 \qquad -2n = -a \qquad -\frac{zf}{q} = -b$$

$$r = 0, q = f \qquad n = \tfrac{1}{2}a \qquad t = b$$

$$nn + tp = -cc$$

$$\tfrac{1}{4}aa + bp = -cc$$

$$bp = -cc - \tfrac{1}{4}aa$$

$$p = \frac{-cc - \frac{1}{4}aa}{b}$$

Beschreibet mit dem Parameter b eine Parabel AMR und richtet in A auf die Axe AN eine Perpendicular-Linie AH auf. Machet $AE = \frac{1}{2}a$, $AF = c$; so ist $EF = (\sqrt{\frac{1}{4}aa + cc})$. Machet $EF = AI = AG$ und $AH = b$; ziehet die Linie HI und mit ihr GK parallel; so ist $AK = (cc + \frac{1}{4}aa) : b$. Wenn nun endlich EQ mit der Axe AN und DK, ingleichen QM mit

Tab. VII Fig. 50.

EA parallel gezogen werden; so ist $DQ = x$. und $QM = y$. Denn $AP = EQ = AK + KP = \frac{cc + \frac{1}{4}aa}{b} + x$ und $PM = y - \frac{1}{2}a$, folgends

weil $PM^2 = t \cdot AP$ (§. 217).

$$y^2 - ay + \tfrac{1}{4}aa = cc + \tfrac{1}{4}aa + bx$$

das ist, $y^2 - ay - bx - cc = 0$.

Die 132. Aufgabe.

361. Einen Ort an einer Ellipsi zu beschreiben.

Auflösung.

Tab. VI. Fig. 51. Es sey in C der Mittelpunct der Axe, $CK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $AC = CB = m$, der Parameter $= t$, $DQ = x$, $QM = y$; so ist (§. 184. Geom.)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Daher $CP = DN - KC = \frac{sx}{q} - p$ und $PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n$. Da nun in der

in der Ellipsi (§. 239).

$t : 2m = PM^2 : AP . PB$

und $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$

$AP = m + \frac{sx}{q} - p$ und $PB = m - \frac{sx}{q} + p$

also $AP . PB = m^2 - p^2 + \frac{2psx}{q} - \frac{s^2x^2}{q^2}$:

so ist $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 =$

$\frac{tm^2 - tp^2}{2m}$

$+ \frac{2tpsx}{2mq} - \frac{ts^2x^2}{2mq^2}$ / folgends

$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$

$+ \frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpsx}{2mq} + tp^2 : 2m$

$2mq - tm^2$

$2m^2$

Wenn ihr die vorgegebenen Gleichungen wie vorhin in der Parabel mit dieser allgemeinen vergleichet; so werdet ihr in jedem Falle den Ort an der Ellipsi beschreiben können.

Z. E. Es sey $y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$; so

$$\frac{-2r}{q} = 0 \qquad \frac{tf^2}{2mq^2} = \frac{c}{b} \qquad \frac{-2n}{n} = 0 \qquad \frac{-2rpf}{2mq} = \frac{cd}{b}$$

$$x = 0, q = f \qquad \frac{t}{2m} = \frac{c}{b} \qquad -2p = d$$

$$p = -\tfrac{1}{2}d$$

$$\frac{8p^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b}$$

$$\frac{cp^2}{b} - \frac{cm^2}{b} = -\frac{a^2c}{b}$$

$$p^2 - m^2 = -a^2$$

$$\tfrac{1}{4}dd + aa = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}dd + aa)} = m$$

Tab. VI. Fig. 52. Richtet demnach auf der Linie AB in C die Linie CE = *a* perpendicular auf und machet KC = $\frac{1}{2}d$; so ist KE = $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + aa)}$. Machet CA = CB = KE; so ist AB die Axe der Ellipsis. Machet ferner CH = *b* und CI = *c*; ziehet die Linie HI und mit ihr AG parallel; so ist GC der halbe Parameter. Machet endlich CO = CG und beschreibet über AO einen halben Circul; so ist CL die halbe kleine Axe und ihr könnet die Ellipsin ALB (§. 257) beschreiben, in welcher KP = *x* und PM = *y*. Denn CP = $x + \frac{1}{2}d$, AP = $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + aa)} + x + \frac{1}{2}d$, PB = $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + aa)} - x - \frac{1}{2}d$ und daher AP. PB = $aa - xx - dx$. Da nun $c : b = PM^2 : AP.PB = y^2 : aa - xx - dx$ (§. 239); so ist

y^2

$$y^2 = \frac{a^2c}{b} - \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b}$$

folgends $y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$.

Zusatz.

362. Wenn man $r = 2m$ setzet; so kommet die Gleichung für alle Oerter im Circul

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{f^2x^2}{q^2} \qquad - \frac{2pfx}{q} + p^2$$
$$q^2 \qquad\qquad q \qquad - m^2$$

Die 133. Aufgabe.

363. Einen Ort an einer Hyperbel zu beschreiben.

Auflösung.

Tab. VI. Fig. 53.

Es sey die Zwerch-Axe $AB = 2m$, in C der Mittel-Punct, $CK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, der Parameter $= t$; so ist (§. 184. Geom.)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

DH

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Also ist $CP = DN (= KP) - CK = \frac{fx}{q} - p$ und

$$PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n.$$

Nun ist $t : 2m = PM^2 : AP . PB$ (§. 260).

$$PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$$

$$AP . PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$$
$$= \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} + p^2 - m^2$$

derowegen $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 =$

$$\frac{tf^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m},$$ folgends

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tf^2x^2}{2mq^2} + \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m}$$
$$- \frac{tp^2}{2m}$$

Wels

Welche Gleichung eben so wie die vorigen gebrauchet wird (§. 360. 361).

Die 134. Aufgabe.

364. Einen Ort an einer Hyperpel zwischen ihren Asymptoten zu beschreiben.

Auflösung.

Es seyn SA und AR die Asymptoten einer Hyperbel. Ziehet DL mit der einen AR parallel und nach Belieben die Linie DH; hingegen KD, QM, LH, IR mit der anderen AS parallel. Es sey ferner KD = PN = n, KA = p, DH = q, LH = r, DL = f, DQ = x, QM = y, RI = m, AR = DL = s; so ist (§. 184. Geom.) Tab. VI. Fig. 54.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Derowegen ist $AP = DN - AK = \frac{fx}{q} - p$

und $PM = QM - PN - NQ = y - n - \frac{rx}{q}$, folgende, weil AR. RI = AP. PM (§. 281).

mf

$$ms = \frac{fyx}{q} - \frac{frx^2}{q^2} - py - \frac{fnx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$qms = fyx - \frac{frx^2}{q} - qpy - fnx + prx + pnq$$

$$qm = yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{f} - nx + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f}$$

$$yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{f} + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f} = o$$
$$-nx - qm$$

Tab. VI. Fig. 55. Wenn alles wie vorhin bleibet, nur daß TM mit DH parallel gezogen und QM = DT = x, hingegen TM = QD = y angenommen wird; so findet man wie vorhin.

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{f} + \frac{pry}{f} + \frac{pnq}{f} = o$$
$$-ny - mq$$

Welche beyde Gleichungen eben wie die vorigen gebrauchet werden.

Anmerckung.

365. Wenn man die gefundenen allgemeinen Gleichungen für die geometrischen Oerter gegen einander hält; so wird man folgende Regeln wahrnehmen / dadurch man urtheilen kan / ob eine gegebene Gleichung ein Ort an einer Parabel / oder Ellipsi, oder Hyperbel / oder einem Circul sey. Nemlich wenn xy in einer Gleichung vorhanden und 1. nur ein Qvadrat entweder von x / oder von y durch andere Grössen multipliciret vorkommet; so ist der Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

2. Wenn

2. Wenn das Qvadrat von x^2 oder y^2 durch das Qvadrat der halben Grösse multipliciret ist / durch welche man xy multipliciret befindet; so ist der Ort an einer Parabel. 3. Wenn x^2 und y^2 beyde das Mehr-Zeichen $+$ haben; so ist der Ort an einer Ellipsi oder einem Circul: und zwar siehet man / daß er an einem Circul sey / wenn man $t : 2m = 1$ findet. 4. Endlich wenn x^2 und y^2 verschiedene Zeichen haben; so ist der Ort an einer Hyperbel / die umb ihre Axe beschrieben worden: welche beyde letztere Regeln 5. auch gelten / obgleich xy fehlet. Hingegen ist 6. in diesem letzteren Falle in dem Orte an der Parabel auch x^2 nicht vorhanden.

Die 135. Aufgabe.

366. Eine cubische und biqvadratische Gleichung geometrisch auszuführen.

Auflösung.

1. Wenn in der Gleichung nur eine unbekandte Grösse vorhanden als y, so nimmet man noch eine x dazu und bringet die vorgegebene Gleichung auf geometrische Oerter.

2. Wenn man zwey von diesen Oertern gebührend beschreibet, daß nemlich die Linien x und y beyderseits auf einander fallen; so giebet der Durchschnitt beyder Oerter den verlangten Werth von y.

Z. E. Die vorgegebene Gleichung sey $y^3 + aby = a^2c$; so ist $a : y = y^2 + ab : ac$
Setzet $a : y = y : x$

so ist I. $ax = y^2$

das

daher $x = y^2 : a$

ingleichen $y : x = y^2 + ab : ac$

$= ax + ab : ac$

$= x + b : c$

II. $x^2 + bx = cy$

$ax = y^2$

$+bx = cy$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$

Ferner $x^2 + bx = cy$

das ist $x^2 + by^2 = cy$

a

IV. $ax + x^2 + bx = y^2 + cy$

$ax = y^2$

$x^2 + bx = cy$

$y^3 + aby = a^2c$

$axy + aby = a^2c$

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

VI. $xy + by = ac$

Solchergestalt findet man

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $x^2 + bx - cy = o$ an der äusseren Parabel.

III. $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = o$ an dem Circul.

IV. $y^2 - x^2 + cy - ax - bx = o$ an der Hyperbel

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = o$ an der Ellipsi.

VI. $xy + by - ac = o$ an der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

Weil

Weil der Circul sich am leichtesten beschreiben lässet; so kan man denselben mit einem von den übrigen fünff Oertern beschreiben und dadurch den Werth von y finden.

Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel; so ist in ihr eine jede Abscisse $DP = x$, eine jede Semiordinate aber $PM = y$. Tab. VII fig. 56.

Für den Circul ist (§. 362).

$$\frac{2r = o \qquad -2n = -c \qquad -2p = b-a}{q \qquad n = \frac{1}{2}c \qquad p = \frac{a-b}{2}}$$

$$r = o \quad q = s$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

das ist $\frac{1}{4}c^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 = m^2$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2)} = m$$

Derowegen traget auf eine gerade Linie AB aus C in K $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ und richtet in K die Linie $KD = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; so ist CD der Radius des Circuls DAMB. Wenn ihr selbigen beschrieben; so ziehet DP mit AB parallel und ihr habet $DP = x$, $PM = y$. Fig. 57.

Nun siehet man leicht, wie der Circul mit der Parabel zu vereinigen, damit die Linien DP und PM auf einander fallen. Richtet nemlich in D die Linie $DK = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; ziehet KQ mit DP parallel und machet $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Endlich beschreibet mit CD Fig. 56. 57.

durch den Scheitel-Punct D den Circul; so ist PM = y.

Denn DP = KQ = $\frac{y^2}{a}$ (§. 222) und daher

CQ = KQ — KC = $\frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Ferner

ist QM = PM — DK = $y - \frac{1}{2}c$ folgends

$$QC^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{by^2}{a} - \frac{ab}{2} + \frac{1}{4}bb$$

$$QM^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$$

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{ab}{2} + \frac{1}{4}b^2$$

$$CM^2 = DC^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$\cdot\, y : a^2$

$$y^3 + aby - a^2c = 0$$

Auf eben solche Art kan man die Oerter an der Ellipsi und der Hyperbel beschreiben und den Circul darauf tragen; damit man den Werth von y findet: welches in folgenden Aufgaben durch wahre Exempel sol erkläret werden.

Es sey die vorgegebene Gleichung $y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$. Weil $y^4 + 2by^3 = a^3d - a^2cy$; so ist

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$$

Setzet $a : y = b + y : x$

so ist I. $ax = by + y^2$

$$ax - by = y^2$$

daher $a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$

II. $a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - b^2 y^2$

Setzet ferner für y^2 seinen Werth $ax - by$; so ist

$$a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - ab^2 x + b^3 y$$

folgende III. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$

$$y^2 + by = ax$$

IV. $y^2 + by + ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 + ax - \frac{b^2 x}{a}$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3 y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2 x}{a}$

Solchergestalt findet man

I. $y^2 + by - ax = o$ an der Parabel.

II. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{a^2 x^2}{b^2} - \frac{a^2 cy}{b^2} + \frac{a^3 d}{b^2} = o$ an der Hyperbel.

III. $x^2 - \frac{b^2 x}{a} + cy - ad + \frac{b^3 y}{a^2} = o$ an der äusseren Parabel.

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3 y}{a^2} + \frac{b^2 x}{a} + ad = o$ an der gleichseitigen Hyperbel.

$+by - ax$

$-cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} - \frac{b^2 x}{a} - ad = o$ an dem Circul.

$+by - ax$

$+cy$

Weñ man nun alle diese Oerter (§. 360. 362. 363) beschreibet und die an den Kegelschnitten mit dem an dem Circul, wie vorhin verknüpffet; so hat man der gegebenen Gleichung auf vierrley Art ein Gnügen gethan.

Anmerckung.

367. Ich halte es für rathsamer / daß ich die vornehmsten Fälle / so vorkommen können / durch wahre Exempel erläutere.

Die 136. Aufgabe.

368. Zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere Proportional-Linien zu finden.

Auflösung.

Tab. VII. Fig. 58. Es sey die kleine $= a$ die grosse $= b$ von den gesuchten die kleine $= y$ die grosse $= x$

so ist

$a : y = y : x$ $\quad$ $y : x = x : b$

I. $ax = y^2$ $\quad$ II. $by = x^2$

a:

$a:y = x:b$ | $y^2 = ax$

III. $ab = xy$
$ax = y^2$
$x^2 = by$

IV. $by - y^2 = x^2 - ax$
$x^2 = by$

$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}by$

V. $x^2 + ax = y^2 + by$ $ax = y^2$

VI. $\frac{1}{2}x^2 + ax = \frac{1}{2}by + y^2$

VII. $ax - \frac{1}{2}x^2 = y^2 - \frac{1}{2}by$

Solchergestalt bekommet man folgende Oerter:

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel,
II. $x^2 - by = o$ an der äusseren Parabel.
III. $xy - ab = o$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.
IV. $y^2 + x^2 - by - ax = o$ an dem Circul.
V. $y^2 - x^2 + by - ax = o$ an der gleichseitigen Hyperbel.
VI. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}by - ax = o$ an der ungleichseitigen Hyperbel.
VII. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - ax = o$ an der Ellipsi.

I. Wenn man demnach mit dem Parameter a eine Parabel DCM beschreibet; so ist der erste Ort beschrieben und $DQ = x$, $QM = y$. Tab. VII. Fig. 59.

Für den Circul ist (§. 362).

$-2r = o$ $-2n = -b$ $-2p = -a$ $n^2 + p^2 - q = m^2$

$r = o$ $n = \frac{1}{2}b$ $p = \frac{1}{2}a$ $q = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2)} = m$

Tab. VII Fig. 60. Traget also auf eine gerade Linie BG aus C in K $\frac{1}{2}a$, richtet in K das Perpendicul KD $= \frac{1}{2}b$ auf; so ist CD $= V(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2)$ der Radius des Circuls DBMG und darinnen DQ $= x$, QM $= y$.

Weil nun der Punct D in den Scheitel-Punct der Parabel fället; so richtet auf der Tab. VII Fig. 59. Axe DQ die Linie DK $= \frac{1}{2}b$ perpendicular auf, ziehet aus K die Linie KG mit DQ parallel, machet KC $= \frac{1}{2}a$ und beschreibet aus C durch D den Circul DBMG; so ist DQ $= x$ und QM $= y$ in dem gegebenen Falle.

Wenn man in der Gleichung $xy = ab$ vor x seinen Werth $y^2 : a$ aus der Gleichung $ax = y^2$ setzet; so bekommet man $y^3 = a^2b$, oder $y^3 - a^2b = o$. Und diese Gleichung dienet füglich zu erweisen, daß die Linie y recht gefunden worden. Denn weil DK $= \frac{1}{2}b$ und KC $= \frac{1}{2}a$; so ist $DC^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$ (§. 172. Geom.). Wiederumb weil QM $= y$ und der Parameter von der Parabel $= a$; so ist DQ $=$ KP $= y^2 : a$ (§. 222) und daher CP $= y^2 : a - \frac{1}{2}a$, hingegen PM $= y - \frac{1}{2}b$, folgends

$$CP^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}aa$$

$$PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}bb$$

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} - by + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}bb$$

CM^2

$$CM^2 = CD^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$y^4 - by = 0$$

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{by}{a^2} = 0$$

$$y : a^2$$

$$y^3 - a^2 b = 0$$

II. Für die Ellipsin ist (§. 361).

$$-2r = 0 \qquad t = \tfrac{1}{2} \qquad -2n = -\tfrac{1}{2}b$$

$$\frac{-2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \tfrac{1}{2} \qquad n = \tfrac{1}{4}b$$

$$r = 0 \quad q = \int \frac{2m}{t}$$

$$t : 2m = 1 : 2$$

$$-2tp = -a \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$\frac{-2tp}{2m} = -a$$

$$p = a \qquad \tfrac{1}{16}b^2 - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{2}a^2 = 0$$

$$\tfrac{1}{16}b^2 + \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$

$$\tfrac{1}{8}b^2 + a^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{8}b^2 + a^2)} = m = t$$

Demnach ist die halbe kleine Axe $= \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)}$.

Machet $BC = a$ und richtet $AB = \frac{1}{4}b$ darauf perpendicular auf; so ist $AC = \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + a^2)}$. Richtet ferner auf AC die Linie $AD = \frac{1}{4}b$ perpendicular auf; so ist $DC = \sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)}$, das ist, die halbe grosse Axe. Tab. VII Fig. 61.

Tab. VII Fig. 62. Gleichergestalt richtet auf $EF = \frac{1}{4}b$, $EG = \frac{1}{2}a$ perpendicular auf: so ist $GF = V(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{4}a^2)$. Richtet ferner $GH = \frac{1}{2}a$ auf GF perpendicular auf; so ist $FH = V(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)$, das ist, die halbe kleine Axe.

Tab. VII Fig. 63. Traget nun auf die Linie AB aus A in E und aus E in B die halbe grosse Axe: ziehet durch E die Linie HI auf AB perpendicular, und machet EH und EI der halben kleinen Axe gleich; so könnet ihr (§. 257) die Ellipsin AHBI beschreiben. Machet ferner $EL = a$ und ziehet $LD = KL = \frac{1}{4}b$ auf AB perpendicular, hingegen KG mit AB parallel. Endlich traget auf KG aus K in C $\frac{1}{2}a$ und beschreibet aus C durch D einen Circul; so ist abermahl $DQ = x$ und $QM = y$. Denn weil $PM = y - \frac{1}{4}b$; so ist $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Wiederumb weil $EP = x - a$, $AE = V(\frac{1}{8}b^2 + a^2) = m$, folgends $AP = m + x - a$ und $PB = m - x + a$; so ist $AP \cdot PB = m^2 + 2ax - x^2 - a^2 = \frac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2$. Derowegen da $AP \cdot PB : PM^2 = 2m : t = 2:1$ (§. 239); so ist

$$2y^2 - by + \tfrac{1}{8}b^2 = \tfrac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2$$

$$y^2 - \tfrac{1}{2}by = ax - \tfrac{1}{2}x^2$$

Im Circul wird gefunden $y^2 - by = ax - x^2$. Wenn ihr diese beyde Gleichungen von einander abziehet; so bleibet übrig $-\frac{1}{2}by = -\frac{1}{2}x^2$. Demnach ist $by = x^2$, folgends $y : x = x : b$. Wenn ihr ferner für x^2 in der

Glei-

Gleichung für den Circul by setzet; so bekommet ihr $y^2 = ax$ folgends $a : y = y : x$. Und solchergestalt sind die Linien DQ und QM richtig gefunden worden.

III. Für die gleichseitige Hyperbel ist (s. 363).

$$\frac{2r = 0}{q} \qquad \frac{-t = -1}{2m} \qquad \frac{-2n = b}{n = -\frac{1}{2}b} \qquad \frac{2p = -a}{p = -\frac{1}{2}a}$$

$r = 0 \quad q = \int \quad t = 2m$

$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2$$

$$m = V(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)$$

Weil $\frac{1}{4}b^2$ von $\frac{1}{4}a^2$ abgezogen werden muß; so müsset ihr hier für b die kleine und für a die grosse Linie annehmen und solches auch bey dem Circul in acht nehmen, daß nemlich die Linien CK und KD mit einander verwechselt werden. Tab. VII Fig. 58. 60.

Wenn ihr dieses in acht nehmet; so könnet ihr die verlangte Linien vermittelst der Hyperbel folgender gestalt finden. Tab. VII Fig. 64. 58.

Über $AB = \frac{1}{2}b$ beschreibet einen halben Circul. Darein traget $BC = \frac{1}{2}a$; so ist $AC = V(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)$ oder wenn a die grosse, b die kleine heissen sollte, $V(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)$, das ist, die halbe Axe.

Tab.VII Fig. 65. 58.

Traget nun auf eine gerade Linie aus G in A und B die halbe Axe, richtet in A die Linie AI $=$ AG perpendicular auf, und beschreibet aus dem Mittelpuncte G durch I einen halben Circul FIf; so sind in F und f die Brenn-Puncte (§. 265) und ihr könnet die Hyperbel (§. 271) beschreiben. Wenn dieses geschehen, so machet EG $=\frac{1}{2}b$, richtet in E die Perpendicular-Linie EK auf, und machet ED $=$ DK $=\frac{1}{2}a$. Ziehet durch D und K die Linien DQ und KP mit der Axe AL parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}b$ und beschreibet aus C durch D einen Circul. Endlich ziehet aus M die halbe Ordinate LM; so ist DQ $= x$, QM $= y$.

Denn LM $= y+\frac{1}{2}a$, EA $=$ GE - AG $=\frac{1}{2}b-\sqrt{(\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}a^2)}$ oder EA $=\frac{1}{2}b-m$ und daher AL $=$ EA $+$ EL $= x+\frac{1}{2}b-m$. BL $= x+\frac{1}{2}b+m$. Also ist LM$^2 = y^2+ay+\frac{1}{4}a^2$ und AL. LB $= x^2+bx+\frac{1}{4}b^2-m^2 = x^2+bx+\frac{1}{4}a^2$. Also ist

$$y^2+ay+\tfrac{1}{4}a^2 = x^2+bx+\tfrac{1}{4}a^2 \text{ (§. 261).}$$

$$y^2+ay = x^2+bx$$

Im Circul $y^2-ay = bx-x^2$

demnach $2ay = 2x^2$

$$ay = x^2$$

folgends $y : x = x : a$

Setzet ferner in der Gleichung für den Circul ay für x^2; so bekommet ihr

$$y^2 - ay = bx - ay$$

das ist $y^2 = bx$

folgends $b : y = y : x$

IV. Auf eben diese Art kan man durch die ungleichseitige Hyperbel der Aufgabe ein Gnügen thun. Wollet ihr aber

V. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gebrauchen; so richtet HD auf DI perpendicular auf, machet $DE = b$ und $EL = a$; theilet EL in zwey gleiche Theile in N oder machet $DK = \frac{1}{2}a$ und ziehet KN mit DE parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}b$ und beschreibet aus C durch D den Circul DELM. Endlich beschreibet auch durch L die Hyperbel TMLS, und aus M, wo sie den Circul durchschneidet, ziehet QM mit DH oder auch PM mit DQ parallel; so ist $DQ = PM = x$, $DP = QM = y$. Denn vermöge der Hyperbel ist (§. 281). Tab VII Fig. 66. 58.

$$DE : DP = PM : EL$$
$$b : y = x : a$$

daher $b - y : y = x - a : a$

Vermöge des Circuls ist $y^2 - ay = bx - x^2$, und daher

$b - x$

$$b-x:y-a = y:x$$

daher $y:x = x:a$

Es ist aber auch $b:y = x:a$

Derowegen $b:y = y:x$.

Zusatz.

369. Wenn die Seite eines Würffels a ist, die Seite des doppelten Würffels $= y$; so ist $2a^3 = y^3$, oder, wenn $2a = b$, $a^2 b = y^3$. Also muß man zwischen der Seite des Würffels und der doppelten Seite zwey mittiere Proportional-Linien suchen; so ist die erste davon die Seite des doppelten Würffels.

Die 137. Aufgabe.

Tab. VIII Fig. 67.

370. Eine gerade Linie AB / die nach Belieben in C getheilet worden / noch ferner in D dergestalt zu theilen / daß $CD:DB = AC^2:CD^2$.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$; so ist $DB = b-y$, folgends, weil $CD:DB = AC^2:CD^2$.

$$y:b-y = a^2:y^2$$

Setzet $a:y = y:x$

so ist I. $y^2 = ax$

und $y:b-y = a^2:ax$

$= a:x$

II. $xy = ab - ay$

Ferner $y^2 : by - y^2 = d : x$

$ax : by - y^2 = a : x$

$x : by - y^2 = 1 : x$

III. $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$

IV. $x^2 + ax = by$

$ax = y^2$

V. $x^2 + 2ax = y^2 + by$

und $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$

Also bekommet man Gleichungen an folgenden Oertern, nemlich

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $xy + ay - ab = o$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

III. $y^2 + x^2 - by = o$ an dem Circul.

IV. $x^2 + ax - by = o$ an der äusseren Parabel.

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = o$ an der gleichseitigen Hyperbel.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = o$ an der Ellipsi.

Tab. VIII Fig. 68. Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel; so ist $DQ = x$, $QM = y$.

Für den Circul ist (§. 362).

$$2r = 0 \qquad -2n = -b \qquad -2p = 0$$

$$q \qquad n = \tfrac{1}{2}b \qquad p = 0$$

$$r = 0 \quad q = \int$$

$$n^2 - m^2 + p^2 = 0$$

$$n^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{2}b = m$$

Tab. VIII Fig. 69. Wenn ihr demnach mit $AC = \frac{1}{2}b$ einen Circul beschreibet, und CD auf AB perpendicular aufrichtet; DL aber mit AB parallel ziehet; so ist ein jedes $DQ = x$ und ein jedes $QM = y$. Denn $PM = y - \frac{1}{2}b$, $AP = \frac{1}{2}b + x$, $PB = \frac{1}{2}b - x$. Daher $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$ und $AP \cdot PB = \frac{1}{4}b^2 - x^2$, folgends

$$y^2 - by + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - x^2$$

$$y^2 - by = -x^2$$

$$y^2 + x^2 - by = 0$$

Damit ihr nun x und y in unserem Falle

Tab. VIII Fig. 68. findet; so setzet den Circul und die Parabel zusammen, dergestalt, daß der Punct D in

die

die Scheitel der Parabel, und DL auf ihre Axe fället. Nemlich richtet in D auf die Axe DR ein Perpendicul $DC = \frac{1}{2}b$ auf, und beschreibet aus C durch D den Circul; so ist D $Q = x$ und $QM = y$ in unserem Falle.

Denn $DQ = CS = y^2 : a$ und $SM = y - \frac{1}{2}b$, $CM = \frac{1}{2}b$. Derowegen weil $CM^2 = CS^2 + SM^2$, und $CM^2 = \frac{1}{4}b^2$, $CS^2 = y^4 : a^2$ $SM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$; so ist

$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{y^4}{a^2} + y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{y^4}{a^2} + y^2 - by = 0$$

$$y^4 + a^2y^2 - a^2by = 0$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

Daher $b - y : y = y^2 : a^2$

Weil die Gleichung der gegenwärtigen Aufgabe gar wenig unterschieden ist von derjenigen, die wir oben durch alle Kegelschnitte construiret (§. 366); so wollen wir die übrigen Kegel-Schnitte übergehen.

Die 138. Aufgabe.

371. Einen rechtwincklichten Triangel zu beschreiben / davon das eine Stücke C B von der grösten Seite gegeben wird / welches Tab. VIII Fig. 70.

ches der Perpendicul CD abschneidet / der aus dem rechten Winckel D gefället wird / und zwar von der Beschaffenheit / daß die Summe der Qvadrate von dem anderen Stücke AC und dem Perpendicul CD nebst einem Rectangulo aus dem Perpendicul CD in eine gegebene Linie FG gleich sey dem Rectangulo aus dem Stücke BC in das andere Stücke AC und eine gegebene Lini HI.

Auflösung.

Es sey $BC = a$, $FG = b$, $HI = c$, $AG = x$, $CD = y$; so ist

$$CB : DC = DC : AC$$
$$a : y = y : x$$

I. $ax = y^2$

$AC^2 + CD^2 + CD \cdot FG = BC \cdot (AC + HI)$

$x^2 + y^2 + by = ax + ac$

II. $y^2 + by = ax + ac - x^2$

daher $ax + by = ax + ac - x^2$

III. $by = ac - x^2$

$\frac{1}{2}by = \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}x^2$

$y^2 + by = ax + ac - x^2$

IV. $y^2 + \frac{3}{2}by = ax + \frac{3}{2}ac - \frac{3}{2}x^2$

$y^2 = ax$

by

$by = ac - x^2$

V. $y^2 - by = ax - ac + x^2$

Wir haben demnach Gleichungen für folgende Oerter:

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $y^2 + x^2 + by - ax - ac = o$ an dem Circul.

III. $x^2 + by - ac = o$ an der äusseren Parabel.

IV. $y^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}by - ax - \frac{3}{2}ac = o$ an der Ellipsi.

V. $y^2 - x^2 - by - ax + ac = o$ an der Hyperbel.

Wenn man in dem Orte an der äusseren Parabel $x^2 + by - ac = o$ für x^2 seinen Werth $y^4 : a^2$ setzet; so bekommet man

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = o$$

daher $y^4 + a^2by - a^3c = o$

Woraus man ersiehet, daß man eine biquadratische Gleichung zu construiren hat.

I. Wenn man mit dem Parameter a eine Parabel beschreibet; so ist der Ort an der Parabel vorhanden.

II. Für den Ort an dem Circul ist

$$\frac{2r = o}{q} \qquad \frac{-2n = b}{n = -\frac{1}{2}b} \qquad \frac{-2p = -a}{p = \frac{1}{2}a}$$

$$r = o, q = \int$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ac$$

$$n^2 + p^2 + ac = m^2$$

$$\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ac = m^2$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ac)} = m$$

Tab. VIII Fig. 71.

Machet demnach RI $= \frac{1}{2}b$ und richtet in I perpendicular auf HI $= \frac{1}{2}a$; so ist HR $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$. Verlängert RH in L biß RL $= a$, und in O, biß RO $= c$. Beschreibet über OL einen halben Circul; so ist das Perpendicul CR $= \sqrt{ac}$ (§. 210. Geom.), folgends CH $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb + ac)}$ der Radius des Circuls. Wenn ihr also aus C mit CH den Circul beschrieben und durch C die Linie AB mit OL parallel gezogen; so machet CK $= \frac{1}{2}a$. Richtet in K das Perpendicul KD $= \frac{1}{2}b$ auf, und ziehet die Linie DQ mit AB parallel; so ist der Ort an dem Circul beschrieben, und der Punct D der Ursprung von x, hingegen y wird biß an die Linie DQ gezogen.

Wenn ihr nun ferner damit den Ort in der Parabel verknüpffen, und dadurch x und y in dem gegebenen Falle determiniren wollet; so nehmet DQ für die Axe an und beschrei-

schreibet darumb mit dem Parameter a die Parabel. Wo sie den Circul durchschneidet, nemlich aus dem Puncte M, lasset ein Perpendicul QM auf die Linie DQ fallen; so ist $DQ = x$, $QM = y$. Machet ihr nun $QS = a$ und ziehet die Linien DM und SM; so ist DMS der verlangte Triangel.

Denn $DQ = KP = \frac{y^2}{a}$. und daher $CP \frac{y^2}{a} = \frac{1}{2}a$, ferner $PM = PQ + QM = \frac{1}{2}b + y$. Derowegen

$$CP^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2.$$

$$PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}bb$$

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} + by + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$CH^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b + ac$$

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = 0$$

$$y^4 + a^2by - a^3c = 0$$

welches die biqvadratische Gleichung ist, die man construiren sollen.

Wie diese Gleichung durch die übrigen Kegelschnitte construiret wird, ist aus der 136. Aufgabe (§. 368) abzunehmen.

Die 139. Aufgabe.

372. Eine allgemeine Regel zu finden alle cubische und biqvadratische Gleichungen zu construiren.

Auflösung.

Tab. VIII Fig. 72.

Es sey MAN eine Parabel und ihre Axe aO, mit welcher AP parallel, darauf DH perpendicular gezogen ist. Aus H als dem Mittelpuncte beschreibet durch A den Circul AMN. Nun sey $AD = b$, $DH = d$, $AQ = c$; so ist $AH^2 = dd + bb$. Es sey ferner $PM = x$, der Parameter der Parabel $= a$; so ist $OM = x + c$ und $KM = x + d$. Da nun (§. 233).

$$a : OM + AQ = PM : AP\ (= QO)$$
$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

so ist $HK^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$ und weil

$KM^2 = x^2 + 2dx + dd$; so ist

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb + x^2 + 2dx + dd = bb + dd,$$

das ist

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$

$$- \frac{2bx^2}{a} + 2dx$$

$$+ x^2$$

$$\frac{x}{a^2}$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0$$

$$- 2abx + 2a^2d$$

$$+ a^2x$$

Hieraus ist klar, daß, wenn das andere Glied das Mehr-Zeichen + hat, die wahren Wurtzeln zur Rechten fallen. Vergleichet demnach mit dieser Gleichung folgende $x^3 + px^2 \overline{+} qx \overline{+} r = 0$; so findet ihr

$c = \frac{1}{4}p$ $\quad 4c^2 - 2ab + a^2 = q$ $\quad 4c^2 - 2ab + a^2 = -q$

$4c^2 + a^2 - q = 2ab$ $\quad 4c + a^2 + q = 2ab$

$\frac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab$ $\quad \frac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$

$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$ $\quad \frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a + \frac{q}{2a} = b$

$2a^2d - 4abc = r$ $\quad 2a^2d - 4abc = -r$

$2a^2d = 4abc + r$ $\quad 2a^2d = 4abc - r$

$$d = \frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} \qquad d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \overline{+} \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \overline{+} \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}$$

Setzet nun $PN = x$, und das übrige bleibe wie vorhin; so ist $NR = PN - RP = PN - DH = x - d$, $NO = x - c$, $PM = x - 2c$, $NR^2 = x^2 - 2dx + d^2$ und, weil (§. 233).

$$a : ON + AQ = PM : AP$$

$$a : x = x - 2c : \frac{x^2 - 2cx}{a}$$

auch daher $DP = HR = \frac{x^2 - 2cx}{a} - b$,

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2$$

folgends $NH^2 = HR^2 + NR^2$ (§. 172. Geom.)

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} = \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2 + x^2$$

$$-2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} + \frac{4bcx}{a} = 0$$

$$- \frac{2bx^2}{a} - 2dx$$

$$+ x^2 \qquad \frac{x}{a^2}$$

$$x^3$$

$$x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc = 0$$
$$- 2abx - 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Hieraus erhellet, daß, wenn das andere Glied das Minder-Zeichen — hat, die wahren Wurtzeln zur Lincken fallen. Man vergleiche demnach mit der gefundenen Gleichung folgende $x^3 - px^2 + qx + r = o$; so ist

$-p = -4c$ | $4c^2 - 2ab + a^2 = q$ | $4c^2 - 2ab + a^2 = -q$

$\frac{1}{4}p = c$ | $\frac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab$ | $\frac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$

$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$ | $\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a + \frac{q}{2a} = b$

$4abc - 2a^2d = r$ | $4abc - 2a^2d = -r$

$4abc - r = 2a^2d$ | $4abc + r = 2a^2d$

$\frac{2bc - r}{a} = \frac{d}{2a^2}$ | $\frac{2bc + r}{a} = \frac{d}{2a^2}$

$\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$ | $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d$

Also ist in allen vollständigen cubischen Gleichungen

$AQ = \frac{1}{4}p$

$DA = \frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} \pm \frac{q}{2a}$

$$DH = \tfrac{1}{4}p + \sqrt{\frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2}}$$

Nemlich q hat allezeit in der Regel —, wenn es in der Gleichung + hat, und hingegen +, wenn hier — ist. Hingegen ist beständig + r, ausser wenn in der Gleichung p und r verschiedene Zeichen haben.

Wenn einige Glieder in der Gleichung fehlen; so müssen auch aus der Gleichung alle weggelassen werden, darinnen die dazu gehörige Buchstaben zu finden. Z. E. Wenn das andere Glied fehlet, so ist $\frac{1}{4}p = o$, und daher $DA = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{q}{2a}}$ und $DH = \sqrt{\frac{r}{2a^2}}$.

Weñ ihr das Qvadrat von dem Radio des Circuls MH oder HN setzet $bb + dd \mp af$; so lässet sich die Gleichung auf keine cubische bringen, sondern sie bleibet biqvadratisch. Wenn ihr nun damit die Gleichung $x^4 \mp px^3 \mp qx^2 + rx \mp f = o$ vergleichet; so bleibet alles, wie vorhin: nur wird gefunden

$$f = a^3 f \text{ und daher } f : a^3 = f.$$

Solchergestalt werden die biqvadratischen Gleichungen durch eben diese Regel construiret; nur daß der Radius des Circuls ($= \sqrt{(bb + dd \mp af)}$) anders gefunden wird, wie bereits in einem Exempel in der vorhergehenden Aufgabe gezeiget worden.

An-

Anmerckung.

373. Diese Regel nennet man insgemein die Backerische Central-Regel / weil sie Thomas Backer / ein Engelländer / gefunden. Ich halte es vor dienlich / ihren Gebrauch durch folgende Aufgabe zu erläutern.

Die 140. Aufgabe.

Tab. VIII Fig. 73.

374. In einem rechtwincklichten Triangel ABC wird gegeben das Stücke von der Hypothenuse BD und das von der Grund-Linie EC nebst dem Perpendicul AB: man sol die Seiten BC und AC finden.

Auflösung.

Es sey $AB = a$ $DC = x$
$BD = b$ $AE = y$
$EC = c$ so ist $BC = b + x$
$AC = c + y$

$CD : DB = CE : EA$
$x : b = c : y$

$xy = bc$

$y = bc : x$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$b^2 + 2bx + x^2 = a^2 + c^2 + 2cy + y^2$
$= a^2 + c^2 + \frac{2bc^2}{x} + \frac{b^2c^2}{x^2}$

$b^2x^2 + 2bx^3 + x^4 = a^2x^2 + c^2x^2 + 2bc^2x + b^2c^2$
das ist, $x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$

$$- a^2x^2$$
$$- c^2x^2$$

Nehmet a für den Parameter an und beschreibet eine Parabel. Weil

$p = 2b$, $q = b^2 - a^2 - c^2$, $r = -2bc^2$, $s = -b^2c^2$; so ist in der Bakerischen Central-Regel.

Tab. VIII Fig. 72.

$$AQ = \tfrac{1}{2}b \quad DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{4b^2}{8a} - \frac{b^2}{2a} + \tfrac{1}{2}a + \frac{c^2}{2a}$$
$$= a + \frac{c^2}{2a}$$
$$DH = \tfrac{1}{2}b + \frac{8b^3}{16a^2} - \frac{2b^3}{4a^2} + \frac{2a^2b}{4a^2} + \frac{2bc^2}{4a^2} - \frac{2bc^2}{2a^2}$$
$$= b - \frac{bc^2}{2a^2}$$

Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel, machet $aQ = \frac{1}{2}b$ und in der Linie QP, welche mit der Axe parallel gezogen, $AD = a + \frac{c^2}{2a}$ die Perpendicular-Linie

Tab. VIII Fig. 74.

$DH = b - \frac{bc^2}{2a^2}$. Wie die Linien $c^2 : 2a$ und b $c^2 : 2a^2$ gefunden werden, ist aus den oben gefundenen Werthen von dergleichen Linien klar: nemlich $c^2 : 2a$ ist die halbe dritte Proportional-Linie zu a und c, hingegen $bc^2 : 2a^2$ ist

ist die vierdte zu a, b und $c^2 : 2a$. Durch H und A ziehet die Linie CB und machet $AB = a$, $AC = b^2c^2 : a^3$, welches die vierdte Proportional-Linie zu a, b und $bc^2 : a^2$ ist. Über CB beschreibet einen halben Circul und richtet aus A den Perpendicul AE auf. Endlich beschreibet aus H mit HE einen Circul, welcher die Parabel in M durchschneidet; so ist $PM = y$.

Denn $AD^2 = a^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$

$$DH^2 = b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$AH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

ferner ist (§. 233)

und $EH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$

$$a : OM + aQ = PM : PA$$
$$a : x + b = x : \frac{x^2 + bx}{a}$$

Daher $DP = HR = \frac{x^2 + bx}{a} - a - \frac{c^2}{2a}$

und weil $RM = x + b - \frac{bc^2}{2a^2}$, so ist

$$RM^2 = x^2 + 2bx + bb - \frac{bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

HR^2

$$HR^2 = x^4 + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - 2x^2 - 2bx + a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{bc^2x}{a^2} + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$$

Wenn man nun von der Summe dieser beyden Qvadrate das Qvadrat von EH abziehet; so bleibet

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} = 0$$
$$- x^2$$
$$- c^2x^2$$
$$\frac{}{a^2}$$

übrig, und demnach ist

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$
$$- a^2x^2$$
$$- c^2x^2$$

ENDE des ersten Theiles.

Die

Der andere Theil
Von den
Anfangs-Gründen
Der
Differential-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

1.

DJe Differential-Rechnung ist eine Wissenschaft aus einer gegebenen endlichen Grösse eine unendlich kleine zu finden / deren unendliche zusammen genommen ihr gleich werden.

Anmerckung.

2. Der Herr Geheimde Rath von Leibnitz hat diese Rechnung gefunden. Es ist aber der tiefsinnige Geometra Isaac Newton in Engelland auf eben dergleichen Gedancken kommen / wie wohl er eine andere Manier hat die unendlich kleinen Grössen zu bezeichnen und auch die Rechnung selbst mit einem anderen Nahmen nennet / nemlich Methodum Fluxionum.

Die 2. Erklärung

3. Eine unendlich kleine Grösse ist diejenige / welche so ein geringer Theil von der anderen ist / daß er mit ihr nicht verglichen werden kan.

Der 1. Zusatz.

4. Dannenhero ist sie in Ansehung der-

jе-

jenigen Grösse, mit welcher sie nicht verglichen werden kan, für nichts zu halten.

Der 2. Zusatz

5. Folgends wenn eine unendlich kleine Grösse zu einer anderen addiret, oder von ihr subtrahiret wird, so ist in dem ersten Falle die Summe, in dem anderen die Differentz der gegebenen gleich zu achten, das ist, eine unendlich kleine Grösse kan eine endliche weder vermehren noch vermindern.

Die 1. Anmerckung.

6. Mercket aber wohl / daß eine unendlich kleine Grösse nur in Ansehung einer anderen für nichts zu achten ; in sich aber nicht nichts ist. Denn bildet euch ein / ihr wollet die Höhe eines Berges messen und indem ihr über der Arbeit begriffen wäret / jagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg umb den Diameter eines Sand-Körnleins niedriger worden. Allein da die Ausmessung der Höhe eines Berges so beschaffen ist / daß die Höhe einerley gefunden wird / ob das Sand-Körnlein liegen bleibet / oder von dem Winde weggejaget wird; so kan man das Sand-Körnlein in Ansehung eines grossen Berges für nichts und also seine Grösse in Ansehung der Höhe des Berges für unendlich kleine halten. Dieses hat man schon längst überall in acht genommen / wo man die Geometrie bey cörperlichen Dingen in der Natur anbringet. Also setzen wir in der Astronomie / der Diameter der Erde sey in Ansehung der Weite von der Sonne und noch mehr der Fixsterne für einen Punct oder unendlich kleine zu halten / weil die erste Bewegung der Sterne sich eben so verhalten würde / wenn die Erde würcklich ein untheilbahrer Punct wäre. So halten wir in den Mond-Finsternissen die Erde für eine vollkommene Kugel und also die Höhen der Berge in Ansehung des Diameters der Erde für unendlich kleine oder für nichts / weil der Schatten der Erde sich auf dem Monden nicht anders darstellen würde / wenn die Berge nicht da wären und die Erde die völlige Gestalt einer Kugel hätte. Da man nun auch in der Geometrie grossen Vortheil davon hat /

hat / wenn man die Grössen in unendlich kleine Theile in Gedancken theilet / das ist / in so kleine / die in Ansehung ihrer für nichts zu halten sind / indem man daraus die endlichen Grössen öfters determiniren und ihre verborgenen Eigenschaften auf die allerleichteste Manier finden kan: wer wil es den Geometris verdencken / daß sie dergleichen vornehmen?

Die 2. Anmerckung.

7. Ihr wisset aus der gemeinen Geometrie / daß eine Linie beschrieben wird / wenn ein Punct sich durch einen gewissen Raum beweget; eine Fläche / wenn eine Linie; ein Cörper / wenn eine Fläche sich beweget. Also erwachsen die Grössen / in dem unendlich viel kleine Theile nach einander anwachsen. Und in dieser Absicht nennet sie *Newton* Fluxionen oder Fluxiones.

Die 3. Erklärung

8. Wenn die unendlich kleinen Grössen als der Unterscheid zweyer endlichen angesehen werden / nennet man sie Differential-Grössen.

Die 4. Erklärung.

9. Differentiiren heisset die Differential-Grösse von einer gegebenen endlichen finden.

Die 5. Erklärung.

10. Die Grössen / welche immer wachsen / oder abnehmen / in dem andere unverändert bleiben / heissen veränderliche; die anderen aber unveränderliche Grössen. Also sind in einer Parabel die Abscissen und Semiordinaten veränderliche Grössen, der Parameter aber ist eine unveränderliche. Denn

in

in dem jene beyden beständig wachsen, bleibet dieser unverändert (§. 217. P. I.).

Zusatz.

11. Da nun die Differential-Grössen die unendlich kleinen Theile sind, welche nach und nach anwachsen, indem sie erzeuget werden (§. 7. 8); so haben die unveränderlichen Grössen keine Differential-Grösse.

Der 1. willkührliche Satz.

12. Nennet die veränderlichen Grössen mit den letzten Buchstaben des Alphabets / *x / y / z*; die unveränderlichen aber mit den ersten / *a / b / c* &c.

Der 2. willkührliche Satz.

13. Die Differential-Grösse von *x* nennet *dx* / die von *y* nennet *dy* und so weiter.

Der 1. Zusatz.

14. Also ist *da*, oder *db*, oder *dc* = *o* (§. 11.).

Der 2. Zusatz.

15. Und die Differential-Grösse von $x+y-a$ ist $dx+dy$; die von $x-y+a$ aber $dx-dy$. Demnach ist es leicht die Grössen, welche zu einander addiret, oder von einander subtrahiret sind, zu differentiiren.

Die 1. Aufgabe.

16. Zwey Grössen / die einander multiplis ciren als *xy* zu differentiiren.

Auf-

Auflösung.

1. Multiplicirer die Differential-Grösse der einen veränderlichen Grösse in die andere veränderliche Grösse.

2. Die beyden Producte addiret zusammen, so kommet die Differential-Grösse von xy heraus, $xdy+ydx$.

Beweiß.

Lasset x und y umb ihre halbe Differential-Grösse vermehret und vermindert werden, so kommet im ersten Falle $x-\frac{1}{2}dx$ und $y-\frac{1}{2}dy$, im anderen Falle $y+\frac{1}{2}dy$ und $x+\frac{1}{2}dx$. Multipliciret beyde durch einander in beyden Fällen, so bekommet ihr $xy-\frac{1}{2}ydx-\frac{1}{2}xdy+\frac{1}{4}dxdy$ und $xy+\frac{1}{2}ydx+\frac{1}{2}xdy+\frac{1}{4}dxdy$: wenn ihr beyde Producte von einander abziehet, so bleibet für die Differential-Grösse des Rectanguli xy übrig $xdy+ydx$. W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

17. Wenn viel Grössen einander multipliciren, so dörffet ihr nur zwey oder mehrere nach einander als eine ansehen und ihr könnet sie nach der gegebenen Regel differentiiren. Z. E. Es sey xyv zu differentiiren, so ist die Differential-Grösse $xydv+xvdy+yvdx$. Denn es sey $xy=t$, so ist $xyv=tv$, folgends $d(xyv)=tdv+vdt$. Nun ist $dt=xdy+ydx$. Derowegen wenn ihr für t

und dt die gehörigen Werthe setzet, so findet ihr $tdv+vdt = xydv+vxdy+vydx$.

Der 2. Zusatz.

18. Dannenhero findet ihr ferner die Differential-Grösse einer Potentz, wenn ihr ihren Exponenten umb 1 vermindert, und alsdenn die erniedrigte Potentz in ihren unveränderten Exponenten und die Differential-Grösse der Wurtzel multipliciret. Nemlich $d(x^2) = 2xdx$, $d(x^3) = 3x^2dx$ und überhaupt $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Der 3. Zusatz.

19. Die Differential-Grösse von ay ist $ady+yda$. Nun ist $da = o$ (§. 14). Derowegen ist $d(ay) = ady$.

Der 4. Zusatz.

20. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42), so ist die Differential-Grösse von einer Irrational-Grösse $(n:m)$

$x^{n:m-1}\,dx = (n:m)\,x^{(n-m):m}\,dx = (n:m)\sqrt[m]{x^{n-m}}\,dx$.

Der 5. Zusatz

21. Wiederumb weil $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$ und überhaupt $1:x^m = x^{-m}$, so ist die Differential-Grösse von $1:x$, und $1:x^2$, ingleichn $1:x^m = -x^{-2}\,dx$, $-2x^{-3}\,dx$ und $-mx^{-m-1}\,dx$.

Anmerckung.

22. Daß $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$, $1:x^3 = x^{-3}$ u. s. w. können ihr bald begreiffen / wenn ihr nur bedencket / es gehen die Exponenten in einer arithmetischen Verhältnis fort / indem die Dignitäten in einer geometrischen fortschreiten. Nun seyn die Dignitäten x^2. x. 1. $1:x$. $1:x^2$. $1:x^3$ / so sind die Expon. 2. 1. 0. -1. -2. -3.

Der 6. Zusatz.

23. Endlich weil $1:\sqrt[m]{x} = 1:x^{1:m} = x^{-1:m}$, $1:\sqrt[m]{x^3} = 1:x^{3:m} = x^{-3:m}$ und überhaupt $1:\sqrt[m]{x^n} = 1:x^{n:m} = x^{-n:m}$; so sind die Differential-Grössen von dergleichen Grössen $-\frac{1}{2}x^{-3:2}dx$, $-\frac{3}{2}x^{-5:2}dx$ und überhaupt $(-n:m)\,x^{-n:m-1}\,dx = (-n:m)x^{-n-m,:m}\,dx = -n\,dx$

$$\overline{m\sqrt[m]{x^{n+m}}}$$

Die 2. Aufgabe.

24. Zwey Grössen / die einander dividiren / $x:y$ zu differentiiren.

Auflösung.

Es sey $x:y = v$

so ist $x = vy$

$dx = v\,dy + y\,dv$ (§. 16).

$dx - v\,dy = y\,dv$

das ist, $dx:y-xdy:y^2 = dv$
oder $(ydx-xdy):y^2 = dv$

Regel.

(1) Multipliciret die Differential-Grösse des Zehlers in den Nenner und (2) des Nenners in den Zehler. (3) Ziehet das letzte Product von dem ersten ab. (4) Das übrige dividiret durch das Quadrat des Nenners.

Zusatz.

25. Wenn im Zehler und Nenner viel veränderliche Grössen enthalten, könnet ihr sie gleichfals nach den gegebenen Regeln differentiiren, wenn ihr zwey als eine ansehet. Denn es sey $xy:vz$ zu differentiiren. Setzet $xy = t$ und $vz = s$; so ist $d(xy:vz) = (sdt-tds):s^2$. Nun ist $dt = xdy+ydx$ und $ds = vdz+zdv$ (§. 16). Derowegen ist $sdt-tds = vzxdy+vzydx-vxydz-xyzdv$, folgends $d(xy:vz) = (vzxdy+vzydy-xyzdv-xyvdz):v^2z^2$.

Die 1. Anmerckung.

26. Wie wir die Regel in der Division gefunden / hättet ihr auch alle Regeln finden können / die in dem 4. 5. und 6 Zusatze der vorhergehenden Aufgabe auf eine andere Art hergeleitet worden. Denn setzet

$$\sqrt[m]{x^n} = v$$

so ist $x^n = v^m$

$nx^{n-1}dx = mv^{m-1}dv$ (§. 18).

$nx^{n-1}\,dx : mv^{m-1} = dv$

Nun ist $v^{m-1} = v^m : v = x^n : \sqrt[m]{x^n}$, folgends

$nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = nx^{n-1}dx\sqrt[m]{x^n} : mx^n = (n:m)\,x^{-1}dx\sqrt[m]{x^n} = (n:m)\,x^{-1}\,x^{n:m}\,dx = (n:m)\,x^{n:m-1}\,dx$, wie ihr es (§. 20) gefunden.

Die 2. Anmerckung.

27. Damit ihr den Nutzen der Differential-Rechnung in der höheren Geometrie sehet / so muß ich zeigen / wie die Eigenschafften der krummen Linien dadurch erfunden werden.

Von den Tangentibus der krummen Linien oder den geraden Linien / die sie berühren.

Die 6. Erklärung

28. Weil der Punct / so die krumme Linie beschreibet / in seiner Bewegung seine Direction beständig ändert (§. 28. Geom.); so kan man sich die krummen Linien vorstellen / als wenn sie aus unendlich kleinen geraden Linien zusammen gesetzt / und daher ein Polygon von unzehlich unendlich kleinen Seiten wären. Wenn ihr nun setzet / daß eine von diesen Seiten Mm in eine endliche gerade TM verlängert wird; Tab. IX. Fig. 75.

so ist selbige der Tangens der krummen Linie.

Zusatz.

29. Derowegen zeiget der Tangens die direction, welche der Punct, so die krumme Linie beschrieben, an jedem Theile derselben gehabt.

Die 7. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 76. 30. Der SUBTANGENS ist die Linie PT, welche zwischen dem Tangente TM und der Semiordinate PM enthalten ist.

Die 8. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 75. 31. Wenn ihr in dem Puncte der Berührung M eine Perpendicular-Linie MH aufrichtet, biß sie die Axe in H erreichet, so heisset sie die Normal-Linie; der Theil der Axe aber PH, welcher zwischen ihr und der Semiordinate PM lieget, die Subnormal-Linie.

Die 3. Aufgabe.

32. In einer jeden gegebenen algebraischen Linie den zu einem gegebenen Puncte gehörigen Subtangentem zu finden.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 75. Setzet die Semiordinate pm der anderen PM unendlich nahe, und ziehet MR mit der Axe AH parallel, so ist MR = Pp (§. 22. Geom.)

om.) die Differential der Abscisse AP, mR die Differential der Semiordinate PM (§. 8). Weil nun PM mit pm parallel ist, so ist der Winckel MmR dem Winckel TMP gleich (§. 97. Geom.) folgends, da bey R und P rechte Winckel sind, mR : MR = PM : PT, (§. 183. Geom.). Setzet nun PM = y, PA = x, so ist MR = dx, mR = dy (§. 13), folgends $dy : dx = y : PT$, und demnach PT = $ydx : dy$. Wenn ihr nun den Werth von dx aus der Æquation substituiret, welche die Natur einer krummen Linie insbesondere erkläret; so verschwindet dx und dy, und kommet der Subtangens TP in lauter endlichen Grössen heraus.

Der 1. Zusatz.

33. Es sey $ax = y^2$, so ist $adx = 2ydy$, $dx = 2ydy : a$, folgends PT = $ydx : dy = 2y^2 dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$. Derowegen ist in der Parabel der Subtangens TP zu der Abscisse AP wie 2 zu 1.

Der 2. Zusatz.

34. Es sey für unendliche Parabeln $a^{m-1} x = y^m$, so ist

$$a^{m-1} dx = my^{m-1} dy \text{ (§. 18).}$$

$$dx = my^{m-1} dy : a^{m-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1} dy = my^m :$$

$am^{m-1} = ma^{m-1}\, x : a^{m-1} = mx.$

Wenn also $m = 3$, so ist $PT = 3x$, das ist, in der Parabel von dem anderen Geschlechte ist $PT : AP = 3 : 1$ &c.

Der 3. Zusatz

35. Es sey $a^n x^r = y^m$, so ist

$$ra^n x^{r-1} dx = my^{m-1} dy \quad (\S 18.)$$

$$dx = my^{m-1} dy : ra^n x^{r-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : ra^n x^{r-1} dy = my^m : ra^n x^{r-1} = ma^n x^r : ra^n x^{r-1} = mx : r.$$

Setzet z. E. $a^3 x^2 = y^5$, so ist $PT = \frac{5}{2}x$, das ist, $PT : AP = 5 : 2$.

Der 4. Zusatz.

36. In dem Circul ist $ax - xx = yy$, und demnach

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a-2x)$$

$$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : (a-2x)\, dy = 2y^2 : (a-2x) = (ax-xx) : (\tfrac{1}{2}a - x).$$ Solchergestalt ist $\frac{1}{2}a - x : a - x = x : PT$.

Tab. IX. Fig. 75. Weil $PT = (ax-xx) : (\frac{1}{2}a - x)$; so ist $AT = (ax-xx) - x = (ax - xx - \frac{1}{2}ax + xx) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} ax : (\frac{1}{2}a - x)$, folgends $a - 2x : a = x :$ AT.

Der 5. Zusatz.

37. Es sey für unendliche Circul (§. 259. P.I.).

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

so ist $max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy$

$$dx = (m+1)y^m dy : (max^m - (m+1)x^m)$$

$PT = ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$. Demnach ist $AT = (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x)$.

Es sey ein Circul von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2$, also $AT = ax : (2a - 3x)$ und $PT = (3ax - 3x^2) : (2a - 3x)$.

Der 6. Zusatz.

38. In der Ellipsi ist $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 239. P. I.) und daher

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$dx = 2aydy : (ab - 2bx)$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 dy : (ab - 2bx)\,dy =$

$2ay^2 : (ab - 2bx) = (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) =$
$(2ax - 2x^2) : (a - 2x)$. Daher ist AT $=$ $(2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) - x = (2abx - 2bx^2 - abx + 2bx^2) : (ab - 2bx) = ax : (a - 2x)$ wie im Circul.

Der 7. Zusatz.

39. Für unendliche Ellipses ist (§. 258. P.I.)

$$ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$$ und daher

$$(m+n)\, ay^{m+n-1}\, dy = mbx^{m-1}(a-x)^n\, dx - nbx^m (a-x)^{n-1}\, dx$$

$$(m+n)\, ay^{m+n-1}\, dy : (mbx^{m-1}\,(a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}) = dx$$

PT $= y\,dx : dy = (m+n)\, ay^{m+n} : (mbx^{m-1}\,(a-x)^n - nbxm\,(a-x)^{n-1}) = (mbx^m\,(a-x)^n + nbx^m(a-x)^n) : mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) =$ (wenn ihr mit bx^{m-1} und $(a-x)^{n-1}$ dividiret) $(m+n)\,(ax - xx) : (ma - mx - nx)$.

Derowegen ist AT $(m+n)\,(ax - xx) : (ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - mx - nx)$.

Es sey Z. E. eine Ellipsis von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2, n = 1$ (§. 258. P.I.), PT $= (3ax - 3xx) : (2a - 3x)$, AT $= ax : (2a - 3x)$.

Der

Der 8. Zusatz.

40. Für eine Hyperbel ist $ay^2 = abx + bxx$ und daher findet ihr wie (§. 38). $PT = (2ax + 2xx) : (a + 2x)$ und $AT = ax : (a + 2x)$.

Der 9. Zusatz.

41. Für unendliche Hyperbeln ist $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$ (§. 286. P. I.). Derowegen findet ihr wie §. 39. $PT = (m+n)(ax+xx) : (ma + mx + nx)$ und $AT = nax : (ma + mx + nx)$.

Der 10. Zusatz.

42. Für eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy = aa$ (§. 284. P. I.).

Daher $xdy + ydx = o$ (§. 14. 16).

$ydx = -xdy$

$PT = ydx : dy = -xdy : dy = -x$.

Also ist der Subtangens der Abscisse gleich, muß aber, weil $-x$ ist, ihrem Uhrsprunge entgegen gesetzet werden, das ist, wenn der Punct, wovon die Abscissen gerechnet werden, zur Lincken der Semiordinate ist, so wird der Subtangens auf der Axe zu ihrer Rechten genommen.

Der 11. Zusatz.

43. Für unendliche Hyperbeln zwischen ihr-

ihren Asymptoten ist $a^{m+n} = y^m x^n$ (§. 285. P. I)

Daher $o = mx^n y^{m-1} dy + nx^{n-1} y^m dx$

$-mx^n y^{m-1} dy : nx^{n-1} y^m = dx$

$PT = ydx : dy = -mx^n y^m : nx^{n-1} y^m = -m x : n$

Es sey eine Hyperbel von dem anderen Geschlechte, so ist $m = 2$, $n = 1$, $PT = -2x$.

Der 12. Zusatz.

Endlich weil für alle Algebraische Linien (§. 214. P.I.)

$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = o$, so ist

$may^{m-1} dy + nbx^{n-1} dx + rcy^{r-1} x^s dy + scy^r x^{s-1} dx = o$

$nbx^{n-1} dx + scy^r x^{s-1} dx = -may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy$

$dx = (-may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1})$

$PT = ydx : dy = (-may^m - rcy^r x^s) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1})$ nach welcher Regel aller Algebraischen Linien Subtangentes gefunden werden, wenn ihr für die underterminirte Buchstaben a, c, b und die Exponenten m, n, r, s ihren Werth aus ihrer Gleichung se-

setzet. Z. E. Weil für die Parabel vom ersten Geschlechte

$ax = y^2$, oder $y^2 - ax = o$, so ist

$ay^m = y^2$ $bx^n = -ax$ $cy^r x^s = o$ $f = o$

$a = 1$ $m = 2$ $b = -a$ $n = 1$ $c = o$ $r = o$ $f = o$

daher PT $= (-2.1y^2 - o.oy^o x^o) : (-1.ax^{1-1} + o.oy^o x^{o-1}) = -2y^2 : -a = 2ax : a = 2x$.

Wiederumb es sey $y^3 - x^3 - axy = o$, so ist

$ay^m = y^3$ $bx^n = -x^3$ $cy^r x^s = -axy$ $f = o$

$a = 1$ $m = 3$ $b = -1$ $n = 3$ $c = -a$ $r = 1$ $f = 1$

daher PT $= (-3.1y^3 - 1.-ayx) : (3.-1x^{3-1} + 1.-ay x^{1-1}) = (-3y^3 + axy) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - ayx) : (3x^2 + ay)$; folgends AT $= (3y^3 - ayx) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay) = axy : (x^2 + ay)$. Denn da $y^3 - x^3 = axy$; so ist $3y^3 - 3x^3 = 3ayx$.

Der 13. Zusatz.

44. Weil PT $= ydx : dy$, PM $= y$; so ist TM $= V(y^2dx^2 : dy^2 + y^2) = V((y^2dx^2 + y^2dy^2) : dy^2) = y\,V(dx^2 + dy^2) : dy$.

Die 4. Aufgabe.

45. Die Subnormal-Linie PH in einer Algebraischen Linie zu finden. Tab. IX. Fig. 75.

Auf-

Auflösung.

Weil der Triangel TMH bey M rechtwinckelicht ist, so ist TP : PM = PM : PH (§. 210. Geom.) $(ydx : dy) : y = y : PH$.

Derowegen $PH = y^2dy : ydx = ydy : dx$. Wenn ihr demnach aus der Gleichung für eine besondere Linie den Werth von dy durch x exprimiret; so bekommet ihr die Subnormal-Linie, wie vorhin die Subtangentem, in lauter endlichen Grössen.

Der 1. Zusatz.

47. Es sey $ax = y^2$,

so ist $adx = 2ydy$

$\frac{1}{2}adx = ydy$

$PH = ydy : dx = adx : 2dx = \frac{1}{2}a$

Demnach ist in der Parabel die Subnormal-Linie beständig dem halben Parameter gleich, folgends die Normal-Linie $MH = V(yy + \frac{1}{4}aa) = V(ax + \frac{1}{4}aa)$.

Der 2. Zusatz.

48. Es sey $ax - xx = y^2$

$adx - 2xdx = 2ydy$

$\frac{1}{2}adx - xdx = ydy$

$PH = ydy : dx = \frac{1}{2}a - x$

Daher ist klar, das alle Normal-Linien in dem Circul durch den Mittelpunct gehen, oder, daß alle Radii des Circuls auf der Peripherie perpendicular stehen und demnach der Tangens des Circuls mit dem Radio einen rechten Winckel machet.

Der 3. Zusatz.

49. Weil $PH = ydy : dx$, und $PM = y$; so ist $HM = V(y^2 + y^2dy^2 : dx^2) = V(y^2dx^2 + y^2dy^2 : dx^2) = yV(dx^2 + dy^2) : dx$.

Die 5. Aufgabe.

50. Die Asymptoten einer Algebraischen Linie zu determiniren.

Auflösung.

1. Wenn die Abscisse AP unendlich groß wird, so ist der Tangens TM die Asymptote, als welche die krumme Linie nicht eher als in einer unendlichen Weite, das ist, niemahls berühren kan (§. 278. P.I.). Daher werden die unveränderlichen Grössen in Ansehung der Abscisse x unendlich kleine. Wenn ihr demnach in dem Werthe von AT diejenigen Grössen weglasset, die nicht mit x multipliciret sind; so findet ihr die Weite des Punctes C, daraus die Asymptote CD gezogen wird, von dem Scheitel-Puncte A. Tab. IX. Fig. 75.

Z. E.

Z. E. In der Hyperbel ist $AT = ax : (a+2x)$ und demnach a in Ansehung x unendlich kleine, folgends $ax : 2x = \frac{1}{2}a = AC$, wie schon oben (§. 272. P. I.) auf andere Art erwiesen worden.

2. Lasset nun ferner auch in der Gleichung für die krumme Linie die unveränderlichen Grössen, die durch keine andere multipliciret sind, weg; so könnet ihr dadurch den Werth von AE finden und folgends die Asymptote ziehen.

Z. E. In der Hyperbel ist $ay^2 = bx(a+x)$. Da nun a in Ansehung x unendlich kleine ist, so habet ihr $ay^2 = bx^2$,

folgends $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$

$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$

Nun ist $dx : dy = AC : AE$ (§. 183. Geom.) das ist $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{1}{2}a : AE$.

Demnach ist $AE = \frac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}aab} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$, wie abermahl oben (§. 272. P. I.) schon auf andere Art erwiesen worden.

Zusatz.

50. In unendlichen Hyperbeln ist (§. 41) überhaupt $AT = nax : (ma+mx+nx)$. Daher

her $AC = nax : (mx + nx) = na : (m+n)$
Und weil ferner (§. 286. P. I.)

$$ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$$

so ist $ay^{m+n} = bx^{m+n}$

oder, wenn ihr $m+n = r$ setzet

$$ay^r = bx^r$$

$$ya^{1:r} = xb^{1:r}$$

$$dya^{1:r} = dxb^{1:r}$$

$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = AC : AE$

$a^{1:r} : b^{1:r} = na : AE$

$$\frac{}{r}$$

Derowegen ist $AE = nab^{1:r} : ra^{1:r}$

$$= na^{r-1} : r \; b^{1:r} : r = (n:r) \sqrt[r]{a^{r-1}b}.$$

Die 6. Aufgabe.

52. Den Subtangentem AH in einer Spiral-Linie zu finden.

Auflösung.

Es sey der halbe Diameter des Circuls A B $= a$, die Peripherie $= b$, der Bogen BD $= x$, AG $= y$, und AC dem radio AD unendlich nahe; so ist CD $= dx$, EF $= dy$. Tab. IX. Fig. 78.

Weil nun AC der Linie AD unendlich nahe ist; so könnet ihr EG als einen Bogen ansehen, der mit dem halben Diameter AG beschrieben worden. Demnach ist

$$AD : AG = CD : EG$$
$$a \quad . \quad y \qquad dx \quad ydx : a$$

Weil EG mit FA einen rechten Winckel machet (§. 47) und AH ist gleichfals auf EA perpendicular aufgerichtet worden; so ist (§. 184. Geom.).

$$FE : EG = GA : AH$$
$$dy : ydx = y : \frac{y^2 dx}{ady}$$

Nun ist für die Archimedische Spiral-Linie

$$ax = by \text{ (§. 312. P.I.).}$$

daher $adx = bdy$

$$dx = bdy : a$$

$$AH = y^2 dx : ady = by^2 : a^2 = axy : a^2 = xy : a$$

Der 1. Zusatz.

53. Also könnet ihr den Subtangentem nicht finden, ihr müsset vorher den Circul-Bogen x in eine gerade Linie verwandeln können.

Der 2. Zusatz.

54. Für unendliche Spiral-Linien ist

$a^m x^n = b^n y^m$ (§. 312. P. I.).

$na^m x_{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$

$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$

$AH = y^2 dx : a dy = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} =$
$ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$

Der 3. Zusatz.

55. Setzet, daß der Bogen BC sich zu FC verhalten solle wie die Abscisse in einer Algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate. Solchergestalt ist $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, $EF = dy$. Tab. IX. Fig. 75.

Nun ist

$AD : AG = CD : EG$

$r : r-y = dx : \frac{rdx - ydx}{r}$

$FE : EG = GA : AH$

$dy : \frac{rdx - ydx}{r} = r-y : \frac{(r-y)^2 dx}{rdy}$

Wenn ihr nun für dx in dem Werthe von AH seinen Werth aus der Gleichung einer Algebraischen Linie setzet; so habet ihr den Subtangentem AH.

Z. E. In der Parabel ist $ax = y^2$, und also $dx = 2ydy : a$. Derowegen wenn der Bogen BC die Abscisse einer Parabel, FC die Semiordinate und a ihren Parameter vor-

stellet; so ist AH $\sqsupseteq 2(r-y)^2\,ydy : ra\,dy \sqsupseteq (2r^2y - 4ry^2 + y^3) : ra \sqsupseteq (2r^2y - 4arx + axy) : ra \sqsupseteq \frac{xy}{r} - 4x + 2ry : a$.

Anmerckung.

56. Ihr könnet BC für die Abscisse und FG für die Semiordinate einer jeden Algebraischen Linie annehmen/ und aus der allgemeinen Gleichung für alle krumme Linien einen allgemeinen Werth für AH finden.

Die 7. Aufgabe.

Tab. IX Fig. 79

57. Den Subtangentem AT in der Conchoide des Nicomedis zu finden.

Auflösung.

Es sey AP $\sqsupseteq x$, PM $\sqsupseteq y$, Pp $\sqsupseteq$ MR $\sqsupseteq dx$ und Rm $\sqsupseteq dy$. Daher ist PT $\sqsupseteq y\,dx : dy$. Es sey ferner AB $\sqsupseteq$ QM $\sqsupseteq a$, CM $\sqsupseteq z$, BC $\sqsupseteq b$; so ist PB $\sqsupseteq a - x$, PC $\sqsupseteq a + b - x$. Damit man den Werth von dx aus der Natur der krummen Linie finden möge; so setzet

$$\frac{a-x \sqsupseteq v}{-dx \sqsupseteq dv} \qquad \frac{a+b-x \sqsupseteq t}{-dx \sqsupseteq dt}$$

Ferner (§. 184. Geom.)

PB : MQ $\sqsupseteq$ PC : MC

$v : a \sqsupseteq t : z$

$$\frac{at \sqsupseteq vz}{adt \sqsupseteq z\,dv + v\,dz}$$

Ende

Endlich (§. 172. Geom.) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, das ist, $z^2 = t^2 + y^2$

$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$

$$zdz = tdt + ydy$$

Setzet aus den vorhergehenden Gleichungen für dv und dt ihren Werth in den beyden letzteren; so habet ihr

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$

$$zdx - adx = vdz \qquad dz = -tdx + ydy$$

$$zdx - adx = dz \qquad z$$

$$v$$

daher

$$\frac{zdx - adx}{v} = -\frac{tdx + ydy}{z}$$

$$z^2dx - azdx = -vtdx + vydy$$

$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$

$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

Daher ist $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt)$ und die Subnormal-Linie $ydy : dx = (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$.

Die 8. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 80. 58. Den Subtangentem PT in der Cycloide zu finden.

Auflösung.

Es sey APB der Circul, der die Cycloidem beschreibet, KP der Tangens des Circuls, qm der anderen Linie QM unendlich nahe und MR mit dem unendlich kleinen Bogen Pp parallel, den ihr für eine gerade Linie halten könnet. Da nun MS = PO, und der Winckel bey R so groß wie der bey p (§. 97. Geom.), folgends, weil bey S und O rechte Winckel sind, RMS = pPO (§. 105. Geom.); so ist auch MR = Pp (§. 71. Geom.). Es sey AP = x, PM = y, so ist Pp = MR = dx, mR = dy. Nun ist Rm mit PM parallel, und daher M mR = TMP (§. 97 Geom.). Und weil MR mit TP parallel ist, so ist mRM = MPT (§. cit.), folgends mMR = MTP (§. 105. Geom.) und daher (§. 184. Geom.).

$$mR : MR = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{y\,dx}{dy}$$

Nun ist in der Cycloide (§. 310. P. I.) y = x und daher $dy = dx$, folgends $y\,dx : dy = y$.

Der 1. Zusatz.

59. Wenn ihr also den Tangentem des Circuls PK (§. 47) ziehet; so ist es auch leich-

leichte den Tangentem der Cycloidis TM zu ziehen.

Der 2. Zusatz.

60. Lasset AP eine andere Algebraische krumme Linie seyn, derer Tangentem ihr ziehen könnet, ihre Bogen aber AP die Abscissen der Transcendentischen Linie AMC; so könnet ihr auf gleiche Weise ihre Tangentes ziehen. Es sey Z. E. Tab. IX. Fig. 80.

$$bx = ay$$

so ist $bdx = ady$

$$dx = ady : b.$$

$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

Die 9. Aufgabe.

61. Den Subtangentem TP zu der Logarithmischen Linie zu finden. Tab. IX. Fig. 81.

Auflösung.

Es sey AH die Axe, PM die Ordinate. Setzet $AP = x$, $PM = y$, so ist $Pp = R$ $M = dx$, $mR = dy$, und weil die Aehnlichkeit der Triangel mRM und PMT wie oben (§. 65), erwiesen werden kan; so ist (§. 184. Geom.)

$$mR : RM = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Setzet eine andere Abscisse $= v$, die zugehörige Semiordinate $= z$: so ist der Subtangens $= zdv : dz$. Weil die Abscissen in einer arithmetischen Progreßion fortgehen, so ist $dx = dv$. Hingegen weil die Semiordinaten in einer geometrischen fortschreiten (§. 306. P. I.), so ist

$$y : y + dy = z : z + dz$$

daher $y : dy = z : dz$ (§. 142. 144. P. I.)
$dx = dv$

$$ydx : dy = zdv : dz$$

Also sind in der Logarithmischen Linie alle Subtangentes einander gleich, oder der Subtangens ist eine unveränderliche Linie.

Von den grösten und kleinesten Applicaten der krummen Linien.

Die 9. Erklärung

62. Wenn die Semiordinaten bis zu einem gewissen Ziele immer mit den Abscissen wachsen / hernach aber wieder abnehmen / unerachtet diese noch beständig zunehmen; so nennet man die Grö-

ste diejenige / wo der Wachsthum aufhöret. Ingleichen wenn sie bis auf ein gewisses Ziel immer abnehmen / indem die Abscissen zunehmen / und hernach mit diesen fortwachsen / so heisset diejenige die Kleineste / wo die Vergeringerung aufhöret. Die Methode einen Werth der Abscisse in lauter unveränderlichen Grössen zu finden / dem die gröste oder kleineste Applicate oder Semiordinate zukommet / nennet man die Methode von den Grösten und Kleinesten. (Methodum de maximis & minimis.)

Anmerckung.

63. Man kan hierdurch auch viel andere Fragen auflösen / da das gröste oder kleineste unter Dingen von einer Art gesuchet wird; wie es die folgenden Exempel zeigen werden.

Die 10. Aufgabe.

64. Die gröste oder kleineste Applicate in einer algebraischen Linie zu determiniren. Tab. IX. Fig. 82.

Auflösung.

Es ist klar, daß der Tangens in dem Puncte G, wo die gröste oder kleineste Applicate ist, mit der Axe parallel laufft, und daher der Subtangens unendlich groß ist. Wenn nun in allen algebraischen Linien der Subtan-

gens ydx : dy (§. 32) unendlich groß wird; so ist dy in Ansehung des Zehlers ydx unendlich kleine, weil er dy unendlich mahl in sich begreiffen muß, und darumb $dy = o$ (§. 4). Suchet derowegen aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie die Differential-Grösse der Applicate und setzet sie $= o$; so könnet ihr aus dieser Gleichung den Werth von x durch gehörige Reduction finden.

Tab. IX. Fig. 83. In einigen Linien fället der Tangens in die Applicate CG und alsdenn ist der Subtangens ydx:dy $= o$. Wenn nun dieser Bruch unendlich kleine seyn soll, so muß dy unendlich groß seyn in Ansehung des Zehlers ydx. Dannenhero wenn $dy = o$ keinen möglichen Werth für die Abscisse zur grösten Applicate giebet; so setzet $dy = \infty$, das ist, einem unendlichen Werthe, und suchet aus dieser Gleichung die Abscisse x.

Der 1. Zusatz.

65. Im Circul ist

$$ax - xx = y^2$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = o$$

$$a - 2x = o$$

$$2$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

Die

Die Abscisse, welche in dem Circul der grö-
sten Applicate zugehöret, ist dem halben
Diameter gleich.

Der 2. Zusatz.

66. Für unendliche Circul ist

$$max^{m-1}dx-(m+1)x^m dx=(m+1)y^m dy=0$$

$$max^{m-1}=(m+1)x^m$$

$$ma=(m+1)x$$

$$ma:(m+1)=x$$

Es sey $m=3$, so ist es ein Circul von dem dritten Geschlechte und $x=\frac{3}{4}a$.

Der 3. Zusatz.

67. Für unendliche Ellipses ist

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy=mbx^{m-1}(a-x)^n dx-nbx^m(a-x)^{n-1}dx$$

$$dy=mbx^{m-1}(a-x)^n dx-nbx^m(a-x)^{n-1}dx,$$
$$:(m+n)\,ay^{m+n-1}=0$$

$$nbx^m(a-x)^{n-1}=mbx^{m-1}(a-x)^n$$

$$nbx=mba-mbx$$

$$nbx+mbx=mba$$

$$x=ma:(m+n)$$

Es sey $m = 1$, $n = 1$, so ist es eine Ellipsis von dem ersten Geschlechte und $x = \frac{1}{2}a$, wie im Circul. Hingegen sey $m = 2$, $n = 1$, so ist es eine Ellipsis von dem anderen Geschlechte und $x = \frac{2}{3}a$.

Der 4. Zusatz.

68. Es sey $x^3 + y^3 = axy$

so ist $3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$

$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy$

$(3x^2dx - aydx) : (ax - 3y^2) = dy = 0$

$3x^2 = ay$

$3x^2 : a = y$

$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3ax^3 : a = 3x^3$

$27x^6 = 2a^3x^3$

$27x^3 = 2a^3$

$3x = a\sqrt[3]{2}$

$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$

Der 5. Zusatz.

69. Es sey $y - a = a^{1:3}(a-x)^{2:3}$

dy

$$dy = -2dxa^{1:3:3}(a-x)^{1:3} = 0$$

$$-2a^{1:3} = 0$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, wenn ihr $dy = 0$ setzet, so nehmet

$$dy = -2dxa^{1:3:3}(a-x)^{1:3} = \infty$$

Also ist $3(a-x)^{1:3}$ in Ansehung seines Zehlers $2dxa^{1:3}$ unendlich kleine. Darumb habet ihr

$$\frac{3(a-x)^{1:3} = 0}{a-x = 0}$$

$$a = x$$

Die 11. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75.

70. Aus dem gegebenen Puncte H in der Axe einer krummen Linie an die Peripherie eine gerade Linie HM zu ziehen/welche die kleineste unter allen ist/die sich aus diesem Puncte ziehen lassen.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $AH = c$, so ist $PH = c - x$, und, weil $PM^2 + PH^2 = MH^2$ (§. 172. Geom.); $c^2 - 2cx + xx + yy = MH^2$. Nehmet MH an als die Applicate einer krummen Linie und setzet

$$c^2 - 2cx + xx + yy = z^2$$

so ist $2xdx - 2cdx + 2ydy = 2zdz$

$$(2xdx - 2cdx + 2ydy) : 2z = dz = 0$$

$$xdx - cdx + ydy = 0$$

Wenn ihr nun aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von ydy setzet; so könnet ihr daraus AP determiniren, der die Applicate PM zugehöret, dahin die kürtzeste Linie HM gezogen wird.

Der 1. Zusatz.

71. Es sey für eine Parabel

$$ax = yy$$

so ist $adx = 2ydy$

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

$$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \tfrac{1}{2}adx = 0$$

$$x - c + \tfrac{1}{2}a = 0$$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a.$$

Der 2. Zusatz.

72. Es sey für eine Ellipsin

$$ay^2 = abx - bx^2$$

so ist $2aydy = abdx - 2bxdx$

$2a$

$ydy = \frac{1}{2}bdx - bxdx : a$

$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \frac{1}{2}bdx - bxdx : (a$

$= 0$

$x - c + \frac{1}{2}b - bx : a = o$

$ax - ac + \frac{1}{2}ab - bx = o$

$ax - bx = ac - \frac{1}{2}ab$

$a-b$

$x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a-b)$

Der 3. Zusatz.

73. Auf gleiche Weise findet ihr für die Hyperbel, daß $x = (ac + \frac{1}{2}ab) : (a+b)$.

Die 12. Aufgabe.

74. Eine Linie AB dergestalt in D zu schneiden, daß das Product aus dem Qvadrate des einen Theiles AD in den anderen DB das gröste sey unter allen, die auf dergleichen Art formiret werden können. Tab. VIII Fig. 67

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$, so ist $AD^2 . DB = axx - x^3$. Setzet demnach, es sey eine krumme Linie, in welcher

$axx - x^3 = aay$

so ist $2axdx - 3x^2dx = aady$

$(2axdx - 3x^2dx) : aa = dy = 0$

$2ax = 3x^2$

$\frac{2}{3}a = x$

Die 13. Aufgabe.

Tab. VIII Fig. 67. 75. Eine Linie AB dergestalt in D zu schneiden / daß das Product aus einer gegebenen Dignität des einen Theiles AD in eine gegebene Dignität des anderen Theiles DB das gröste unter allen sey / die auf dergleichen Art formiret werden.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$; so ist $x^m (a-x)^n$ das gröste von seiner Art. Setzet demnach

$$x^m (a-x)^n = a^{m+n-1}y$$

so ist $mx^{m-1}(a-x)\,dx - nx^m(a-x)^{n-1}\,dx = a^{m+n-1}dy$

$(mx^{m-1}(a-x)^n\,dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx) : a^{m+n-1} (= dy = 0$

$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$

$m(a-x)^n = nx(a-x)^{n-1}$

$ma - mx = nx$

$ma : (m+n) = x$

Die

Die 14. Aufgabe.

76. **Unter allen** Parallelepipedis, **die einem gegebenen Würffel gleich sind / und deren eine Seite gegeben wird / dasjenige zu finden / das die geringste Fläche hat.**

Auflösung.

Es sey b die eine Seite, x die andere, der gegebene Würffel $= a^3$, so ist dritte $= a^3 : bx$.

Folgends die Fläche des Parallelepipedi $2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b$. Setzet demnach es sey in einer krummen Linie.

$$2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b = ay$$

$$\text{so ist } 2bdx - 2a^3dx : x^2 = ady = 0$$

$$2b - 2a^3 : x^2 = 0$$

$$bx^2 = a^3$$

$$x^2 = a^3 : b$$

$$x = V(a^3 : b)$$

Also sind die drey Seiten $b, V(a^3 : b)$ und $a^3 : bV(a^3 : b) = V(a^6 : V(b^2a^3 : b)) = V(a^6b : Va^3b^2) = V(a^3 : b)$.

Die 15. Aufgabe.

77. **Unter allen** Parallelepipedis, **die ei-**

nem gegebenen Würffel gleich sind/dasjenige zu finden / so die kleineste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey der gegebene Würffel $= a^3$, die eine Seite $= x$, so sind die beyden anderen Seiten (§. 76) $V(a^3 : x)$, und daher ist die Fläche des Parallelepipedi $= 2a^3 : x + 4 V a^3 x$. Da nun dieses die kleineste von ihrer Art ist, so setzet die Gleichung für eine krumme Linie

$$2a^3 : x + 4 V a^3 x = ay$$

so ist $-2a^3 dx : x^2 + 2a^3 dx : V a^3 x = ady$

$$-2a^2 dx : x^2 + 2a^2 dx : V a^3 x = 0$$

$$a^2 : V a^3 x = a^2 : x^2$$

$$x^2 = V a^3 x$$

$$x^4 = a^3 x$$

$$x^3 = a^3$$

$$x = a$$

Also hat der Würffel selbst die kleineste Fläche.

Die 16. Aufgabe.

78. Unter allen Regeln / die innerhalb einer Kugel beschrieben werden können/ denjeni-

jenigen zu determiniren / der die gröste Fläche hat.

Auflösung.

Tab. X. Fig. 84.

Es ist klar, daß, wenn sich ein halber Circul umb seinen Diameter AB wendet, derselbe eine Kugel, die Triangel aber ANP, AFE, &c. Kegel beschreiben. Die Fläche des Kegels kommet heraus, wenn ihr die Seite des Kegels FA durch die halbe Peripherie, die mit dem Radio FE beschrieben worden, multipliciret. Weil ihr nun die gröste von ihrer Art suchet, so setzet AE $=x$, AB $=a$, und es ist FE $=\sqrt{(ax-xx)}$ (§. 210. Geom.), die halbe Peripherie $m\sqrt{(ax-xx)}$, AF $=\sqrt{ax}$. Derowegen habet ihr die Gleichung für eine krumme Linie.

$$m\sqrt{(ax-xx)}\sqrt{ax} = ay$$

$$m\sqrt{(a^2x^2-ax^3)} = ay$$

$$2ma^2xdx-3max^2dx : 2\sqrt{(a^2x^2-a^3)} = ady$$

$$2ax-3x^2 = 0$$

$$2a = 3x$$

$$\tfrac{2}{3}a = x$$

ENDE
Des anderen Theiles.

Der dritte Theil
Von den
Anfangs-Gründen
Der
Integral-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

79.

Die Integral-Rechnung ist eine Wissenschaft aus einer gegebenen unendlich kleinen Grösse diejenige endliche zu finden / durch deren Differentiirung sie entstehet.

Zusatz.

80. Derowegen habet ihr eine gewisse Probe ob ihr die rechte Grösse gefunden, wenn ihr die gefundene Integral nach den oben gegebenen Regeln differentiiret und die gegebene Differential wieder heraus kommet.

Die 2. Erklärung.

81. Integriren oder Summiren heisset die Grösse finden / aus welcher durch Differentiirung die gegebene unendlich kleine entstanden.

Die 1. Aufgabe.

82. Eine gegebene Differential zu integriren oder summiren.

Auf-

Auflösung.

Gleichwie man die Differentiale der veränderlichen Grössen durch d andeutet; so pfleget man die Integrale derselben als die Sume unendlicher unendlich kleiner Grössen durch $\int$ anzudeuten. Daher heisset $\int y dx$ so viel als die Integral von $y dx$.

Wann ihr nun die Integral finden wollet so vergleichet die gegebene Differential mit denen, so ihr oben (§. 13 & seqq.) gefunden: so werdet ihr bald wahrnehmen, wie die Veränderung vorzunehmen sey. Es ist aber

I. $\int dx = x$
II. $\int (dx \pm dy) = x \pm y \pm a$ oder $x \pm y$
III. $\int (x dy + y dx) = xy$
IV. $\int m x^{m-1} dx = x^m$
V. $\int (n:m) x^{n-m.}:^m dx = x^{n:m}$
VI. $\int (y dx - x dy) : y^2 = x : y$

Von diesen Formuln seyd ihr gewiß, daß sie sich alle integriren lassen, und zwar setzet ihr in dem anderen und ersten Falle nur an stat dx oder dy die veränderliche Grösse x oder y selbst. In dem dritten multiplicaret ihr die beyden veränderlichen Grössen xy durch einander, dadurch ihre Differentiale dy und dx multipliciret sind. In dem vierdten und fünfften (welcher der gewöhnlichste ist) addi-

ret ihr zu dem Exponenten der Dignität der veränderlichen Grösse 1 und durch den vermehrten und die Differential der veränderlichen Grösse dividiret ihr die gegebene Differential. Endlich in dem sechsten Falle nehmet ihr die veränderliche Grösse mit dem Zeichen — für den Zehler und die Wurtzel von dem Qvadrate des Nenners für den Nenner all.

Die 1. Anmerckung.

83. Es können zwar noch viel andere Fälle vorkommen/ die hier nicht berühret werden: allein ihr werdet es besser aus Exempeln / als durch weitläuftige Regeln lernen.

Die 2. Anmerckung.

84. Mercket aber/ daß einige Grössen sind/ die sich nicht integriren lassen. Denn wie man in der gemeinen Algebra zwar alle Grössen zu einer verlangten Dignität erheben / nicht aber aus jeder Dignität eine verlangte Wurtzel ausziehen kan; eben so kan man in der höheren Analysi zwar eine jede veränderliche Grösse differentiiren/ allein nicht eine jede Differential summiren. Gleichwie man aber in der gemeinen Algebra die Wurtzel durch Näherung suchet/ eben so pfleget man in der höheren die Integral durch Näherung zu suchen / wo man sie nicht vollkommen haben kan. Allein zur Zeit hat man noch keine Regel / daraus man schliessen könte / ob die Summation statt findet oder nicht / und können wohl einige Differentiale zum Summiren geschickt seyn/ die wir zur Zeit noch nicht summiren können.

Von den Qvadraturen der krummen Linien.

Die 3. Erklärung.

85. Die Differential oder das Element einer

einer ebenen Fläche / die in eine krumme und zwey gerade Linien eingeschlossen / als AMP, ist das Rectangulum aus der Semiordinate PM in die Differential der Abscisse Pp. Tab. IX. Fig. 75.

Der 1. Zusatz.

86. Derowegen wenn die Semiordinate $PM = y$, $AP = x$, so ist $Pp = dx$ und das Rectangulum $PMRp = y\,dx$.

Der 2. Zusatz.

87. Weil die Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind, so ist ihre Differentz mR in Ansehung ihrer nichts (§. 4), und daher das Rectangulum PMRp dem Trapezio PMmp gleich (§. 5). Da ihr nun die Figur in unendlich solche Trapezia resolviren könnet; so ist $\int y\,dx$ der Inhalt der Fläche AMP.

Der 3. Zusatz

88. Derowegen wenn ihr aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von y setzet, und ihr könnet die Differential der Fläche integriren; so habet ihr die Quadratur der Fläche gefunden.

Die 2. Aufgabe

89. Den Inhalt eines Triangels zu finden.

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 75. Wenn ihr die krumme Linie AM als eine gerade ansehet, so ist AMP ein Triangel, und daher auch sein Element ydx. Setzet nun die Höhe des Triangels, davon x ein Theil ist, $= a$, die Grundlinie, welche mit PM oder y parallel ist, $= b$; so ist (§. 184. Geom.) $a:b = x:y$ folgends

$$ay = bx$$

$$y = bx:a$$

$$ydx = bxdx:a$$

$$\int ydx = bx^2:2a \quad (\text{§. } 82)$$

Wenn ihr nun den gantzen Triangel verlanget, so setzet fur den Theil der Höhe x, die gantze Höhe a und ihr findet den Inhalt $ba^2:2a = \frac{1}{2}ab$.

Anmerckung.

90. Dieses Exempel habe ich nur zu dem Ende gegeben/ damit ihr sehet/ daß durch die Integral-Rechnung/ deren Gründe den Anfängern zuerst zweiffelhaft scheinen/ eben das gefunden wird/ was in der gemeinen Geometrie aus anderen Gründen erwiesen worden.

Die 3. Aufgabe.

91. Die Parabel zu qvadriren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$a^{\frac{1}{2}}$

$$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$y dx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int y dx = \tfrac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} \sqrt{a x^3} = \tfrac{2}{3} \sqrt{x^2 y^2} = \tfrac{2}{3} xy.$$

Zusatz.

92. Also verhält sich der Raum in der Parabel AMP zu dem Rectangulo aus der Semiordinate PM in die Abscisse AP wie $\frac{2}{3} x y$ zu xy, das ist, wie 2 zu 3.

Die 4. Aufgabe.

93. Unendliche Parabeln auf einmahl zu qvadriren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln und noch andere Linien ist

$$a^m x^n = y^r$$

$$a^{m:r} x^{n:r} = y$$

$$y dx = a^{m:r} x^{n:r} dx$$

$$\int y dx = \frac{r}{n+r} a^{m:r} x^{n+r,:r} = \frac{r}{n+r} yx$$

Z. E. Es sey eine Parabel von dem an-

deren Geschlechte, so ist $a^2x = y^3$, daher $r = 3$, $n = 1$, folgends $\int y dx = \frac{3}{4}xy$.

Die 5. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75.

94. Das Stücke von der Parabel PMNS zu qvadriren.

Auflösung.

Es sey die unveränderliche Linie $AP = b$, $PS = x$, $SN = y$, der Parameter $= a$; so ist $AS = b + x$ und (§. 217. P. I.).

$$ab + ax = y^2$$

$$\sqrt{(ab + ax)} = y$$

$$dx\sqrt{(ab + ax)} = y dx$$

Damit man dieses Element integriren kan; so setzet

$$\sqrt{(ab + ax)} = y$$

so ist $ab + ax = v^2$

$$a dx = 2v dv$$

$$dx = 2v dv : a$$

$$dx\sqrt{(ab + ax)} = 2v^2 dv : a$$

$$\int y dx = \tfrac{2}{3} v^3 : a = \tfrac{2}{3}(b + x)\sqrt{(ab + ax)}.$$

Weil x in P $= o$ wird und auch der Raum PSN

M nichts werden muß, wenn $x = o$; hingegen wenn ihr in der gefundenen Summe $x = o$ setzet; $\frac{2}{3} bV ab$ übrig bleibet; so ist klar, daß ihr von dem gefundenen Werthe $\frac{2}{3} bV ab$ noch abziehen müsset, damit ihr den Inhalt von von dem Raume PMNS $= \frac{2}{3}(b+x)V(ab+ax) - \frac{2}{3} bV ab$ bekommet. Nemlich $\frac{2}{3}(b+x)V(ab+ax)$ ist der gantze Paraboliſche Raum ANS, und $\frac{2}{3} bV ab$ das Stücke AMP; folgends der Unterſcheid PMNS.

Es könte auch AS von beſtändiger Grösse angenommen und x von S angerechnet werden. Wenn nun AS $= b$, SP $= x$, so ist PA $= b - x$, folgends (weil PM $= y$)

$$ab - ax = y^2$$

$$V(ab - ax) = y$$

$$dxV(ab - ax) = ydx$$

Setzet wie vorhin

$$ab - ax = v^2$$

so ist $-adx = 2vdv$

$$dx = -2vdv : a$$

$$dxV(ab-ax) = -2v^2dv : a$$

$$\int ydx = -\frac{2}{3}v^3 : a = -\frac{2}{3}(b-x)V(ab-ax)$$

Setzet ferner, wie vorhin, $x = o$; so bleibet

bet $-\frac{2}{3}bV\,ab$ übrig, und demnach müsset ihr $\frac{2}{3}bV\,ab$ addiren, damit der Inhalt des Raumes PMNS herauskommet. Nemlich ANS $=\frac{2}{3}bV\,ab$ und APM $=\frac{2}{5}(b-x)V\,(ab-ax)^{5}$, folgends PMNS $=\frac{2}{3}bV\,ab-\frac{2}{3}(b-x)V\,(ab-ax)$.

Zusatz.

95. Wenn also die Gleichung für eine krumme Linie gegeben wird, und man nicht weiß, wo x in der Axe seinen Anfang hat; so erhellet aus der Auflösung, daß man nur $x=o$ setzen darf, umb zu finden, ob noch etwas zu addiren oder zu subtrahiren übrig verbleibet.

Die 6. Aufgabe.

96. Eine Linie zu qvadriren/ in welcher $xy^3=a^4$.

Auflösung.

Weil $xy^3=a^4$

so ist $y^3=a^4:x=a^4x^{-1}$

$y=a^{4:3}\,x^{-1:3}$

$ydx=a^{4:3}\,x^{-1:3}dx$

$\int ydx=\frac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2}$.

Die 7. Aufgabe.

97. Die krumme Linie des Cartesii (Tom. 3. Epist.

3. Epist. p. 219.) zu qvadriren / in welcher $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Auflösung.

Weil $b^2y = bx^2 - x^3$

so ist $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$

$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$

Die 8. Aufgabe.

98. Die krumme Linie zu qvadriren / deren Gleichung ist $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4y$.

Auflösung.

Weil $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$

so ist $ydx = (x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a)dx$

$\int ydx = x^6 : 6a^4 + x^5 : 5a^3 + x^4 : 4a^2 + x^3 : 3a + ax$.

Die 9. Aufgabe.

99. Eine krumme Linie zu qvadriren, in welcher $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^4 + a^2x^2$

so ist $y = \sqrt{(x^4 + a^2x^2)} = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

ydx

$$ydx = xdx\sqrt{(x^2+a^2)}$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, setzet

$$x^2+a^2 = v^2$$

so ist $2xdx = 2vdv$

$$xdx\sqrt{(a^2+x^2)} = v^2dv$$

$\int xdx\sqrt{(x^2+a^2)} = \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$.

Setzet nun $x = o$, so bleibet $\frac{1}{3}a^3$ übrig. Solchergestalt ist $\int ydx = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)} - \frac{1}{3}a^3$ (S. 94).

Die 10. Aufgabe.

100. Eine krumme Linie zu qvadriren, in welcher $y^2 = x^3+ax^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^3+axx$

so ist $y = x\sqrt{(x+a)}$

$$ydx = xdx\sqrt{(x+a)}$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, setzet

$$x+a = v^2$$

so ist $x = v^2 - a$

$dx = 2vdv$

$xdx\sqrt{(x+a)} = 2v^4dv - 2av^2dv$

$\int xdx\sqrt{(x+a)} = \frac{2}{5}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = (\frac{2}{5}(xx+2ax+aa) - \frac{2}{3}(ax+aa))\sqrt{(x+a)} = (\frac{6}{15}(xx+2ax+aa) - \frac{10}{15}(ax+aa))\sqrt{(x+a)} = (6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)} : 15 + \frac{4}{15}a^2\sqrt{a}$ (§. 94).

Die 11. Aufgabe.

101. Eine krumme Linie zu qvadriren / in welcher $y^2 = x^2 : (x+a)$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^2 : (x+a)$

so ist $y = x : \sqrt{(x+a)}$

$ydx = xdx : \sqrt{(x+a)}$

Setzet $\sqrt{(x+a)} = v$

so ist $x+a = v^2$

$x = v^2 - a$

$dx = 2vdv$

$xdx : \sqrt{(x+a)} = (2v^3dv - 2avdv) : v$
$= 2v^2dv - 2adv$

$\int xdx : \sqrt{(x+a)} = \frac{2}{3}v^3 - 2av = (\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}a - 2a)$
$\sqrt{(x$

$\sqrt{(x+a)} = (\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}a)\sqrt{(x+a)} = \sqrt{(4x^3 - 12ax + 16a^3, :9)} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 3axx + 4a^3)} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$ (§. 94).

Die 12. Aufgabe.

102. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu qvadriren.

Auflösung.

Für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist

$$a^2 = by + xy \quad \text{(§. 287. P.I.)}.$$

daher $a^2 : (b+x) = y$

$$ydx = a^2 dx : (b+x)$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, so dividiret in der That

$$a^2 \left\{ \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} \text{ \&c.} \right.$$

$b+x)$

$$a^2 + a^2x : b$$
$$-a^2x : b$$

$b+x)$

$$-a^2x : b - a^2x^2 : b^2$$
$$+a^2x^2 : b^2$$

$b+x)$

$$+a^2x^2 : b^2 + a^2x^3 : b^3$$
$$-a^2x^3 : b^3$$

$b+x)$

Denn

Denn ist $a^2dx : (b+x) = \frac{a^2dx}{b} - \frac{a^2xdx}{b^2} +$

$\frac{a^2x^2dx}{b^3} - \frac{a^2x^3dx}{b^4}$ u. s. w. unendlich fort.

Folgends habet ihr $\int ydx = \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} +$

$\frac{a^2x^3}{3b} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ u. s. w. unendlich fort, das ist,

wenn ihr $a = b = 1$ setzet, $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ &c.

Anmerckung.

103. Diese Qvadratur der Hyperbel hat zuerst Nic. Mercator in seiner Logarithmotechnia gegeben / welcher die unendlichen Reihen zu Qvadrirung der Figuren zuerst gebrauchet / die man nicht accurat qvadriren kan.

Die 13. Aufgabe.

104. Den Circul zu qvadriren.

Auflösung.

Die Gleichung für den Circul ist

$y^2 = a^2 - x^2$ (§. 198. P. I.)

$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$

$ydx = dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$

Ziehet aus $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ die Wurtzel, so findet

ihr (§. 97. P. I.) $ydx = adx - \frac{x^2dx}{2a} - \frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5} - \frac{5x^8dx}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integrale $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ u. s. w. unendlich fort den Theil des Circuls BNP ausdrucket.

Tab. X. Fig. 84.

Wenn ihr für x den halben Diameter a setzet, so kommet der Werth des Quadrantens $a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112} - \frac{5a^2}{1152}$ u. s. w. Setzet $a = \frac{1}{2}$, so ist $a^2 = \frac{1}{4}$, und demnach der ganze Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. unendlich fort.

Anders.

Tab. II. Fig. 15.

Es sey CB der Tangens des halben Bogens GB $= x$, der halbe Diameter BA $= a$, so ist BD der Tangens des gantzen Bogens BG $= 2aax : (aa - xx)$ (§. 190. P. I.), folgends, DA $= (a^3 + ax^2) : (aa - xx)$ (§. cit.). Nun ist (§. 184. Geom.) DA : DB = GA : GH, darumb findet ihr GH $= 2a^2x : (a^2 + x^2)$ und ferner AH $= (a^3 - ax^2) : (aa + xx)$ (§. 184. Geom.), endlich BH $= 2ax^2 : (aa + xx)$. Wenn ihr der beyden Differential-Grössen von GH und BH, nemlich $(2a^4dx - 2a^2x^2dx) : (a^2 + x^2)^2$ und $4a^3xdx : (a^2 + x^2)^2$, Quadrate $(4a^8dx^2 -$

$8a^6x^2dx^2+4a^4x^4dx^2$): $(a^2+x^2)^4$ und $16a^6x^2dx^2$: $(a^2+x^2)^4$ zusammen setzet, und aus der Summe $(4a^8dx^2+8a^6x^2dx^2+4a^4x^4dx^2)$: $(a^2+x^2)^4$ die Quadrat-Wurzel $(2a^4dx+2a^2x^2dx)$: $(a^2+x^2)^2 = 2a^2dx : (a^2+x^2)$ ausziehet; so habet ihr die Differential des Bogens GB. Multipliciret diese in den halben Radium oder $\frac{1}{2}a$; so kommet das Element des Sectoris BGA (§. 171. Geom.) heraus $a^3dx : (a^2+x^2)$. Setzet $a = 1$; so ist das Element $dx : (1+x^2)$. Nun findet ihr durch die gemeine Division wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 102) $1 : (1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ u. s. w. unendlich fort, und folgends $\int dx : (1+x^2) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}$ u. s. w. unendlich fort. Diese unendliche Reihe ist für den Ausschnitt BAG, dessen halben Bogens Tangens $BC = x$ ist. Nun ist der Tangens des halben Quadrantens dem Radio gleich. Derowegen wenn ihr $x = 1$ setzet, so ist $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. unendlich fort der Inhalt des Quadrantens. Nehmet ihr endlich den Diameter des Circuls 1 an; so ist eben selbige unendliche Reihe der Inhalt des gantzen Circuls.

Anmerckung.

105. Die erste Reihe für den Circul hat der Herr *Newton*; die andere der Herr von Leibnitz gefunden.

Die 14. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 27.

106. Die Ellipsin zu qvadriren.

Auflösung.

Es sey AC $=a$, DC $=b$, PC $=x$, PM $=y$; so ist AP $=a-x$, PB $=a+x$, und aus der Natur der Ellipsis.

$$AP.PB : AC^2 = PM^2 : CD^2 \text{ (§. 251. P. I.).}$$
$$aa-xx : aa = yy : bb$$
$$aayy = bb(aa-xx)$$
$$y = bV(aa-xx) : a$$
$$ydx = bdx\,V(aa-xx) : a$$

Nun ist $V(aa-xx) = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort (§. 97. P. I.)

Derowegen ist $bdx\,V(aa-xx) : a = bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{128a^8}$ u. s. w. unendlich fort. Folgends ist $\int ydx = bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr für x die halbe Axe a setzet, so bekommet ihr für den Qvadranten der El-

Ellipsis $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{5}{1152}ab$ u. s. w. unendlich fort, und also für die gantze Ellipsin eben dieselbe Reihe, wenn ihr a für die gantze grosse und b für die gantze kleine Axe annehmet.

Der 1. Zusatz.

107. Wenn ihr $\sqrt{ab} = 1$ setzet, so kommet die Reihe für den Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. heraus (§. 104). Derowegen ist die Ellipsis einem Circul gleich, dessen Diameter die mittlere Proportional-Linie ist zwischen seiner kleinen und grossen Axe, und also verhält sich die Ellipsis zu dem Circul, der mit der grossen Axe beschrieben wird, wie die kleine Axe zu der grossen.

Der 2. Zusatz.

108. Daher dependiret die Qvadratur der Ellipsis von der Qvadratur des Circuls.

Die 1. Anmerckung.

109. Die Qvadratur des Circuls / der Ellipsis und Hyperbel hat noch niemand durch einen endlichen Werth gegeben.

Die 2. Anmerckung.

110. Aus der gefundenen Qvadratur der Ellipsis lässet sich nun ferner der Lehrsatz erweisen / den wir in der Astronomie (§. 419) angenommen / daß nemlich der Sector des Circuls KAP sich zu dem Sectore CAP verhalte wie der Circul zu der Ellipsi. Denn es ist klar / daß CLP sich zu KLP verhalte / wie der Circul zur Ellipsi. Die Triangel aber CAL und KAL verhalten sich wie CL zu KL (§. 176 Geom.) oder wie RE zu DR / folgends wie die Ellipsis zu dem Circul (§. 107). Folgends ist KAL + KLP zu CAL + CLP wie der Circul zu der Ellipsi. Tab. X. Fig. 85.

Die 3. Anmerckung.

111. Daß aber $LC : LK = RE : DR$ lässet sich leicht erweisen. Denn vermöge der gegenwärtigen Aufgabe ist $LC = b\sqrt{(aa-xx)} : a$ und $LK = \sqrt{(aa-xx)}$. Daher $LC : LK = b\sqrt{(aa-xx)} : a\sqrt{(aa-xx)} = b : a = RE : DR$.

Die 15. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 81.

112. Den Raum HPMI zwischen der Logarithmischen Linie MI und ihrer Axe PH zu finden.

Auflösung.

Es sey $PM = y$, $Pp = dx$, der Subtangens $= a$ (§. 61), so ist $ydx : dy = a$

$$ydx = ady$$

$$\int ydx = ay$$

Der 1. Zusatz.

113. Setzet $QS = z$, so ist $QHIS = az$, folgends $PQSM = ay - az = a(y-z)$ das ist, dem Rectangulo aus dem Subtangente in die Differentz der Semiordinaten.

Der 2. Zusatz.

114. Derowegen verhalten sich die Räume zwischen zweyen Semiordinaten wie ihre Differentzen.

Die 16. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 78.

115. Die Spiral-Linie zu qvadriren.

Auf-

Auflösung.

Es sey alles, wie in der 6 Aufgabe (§. 52), so ist $EG = ydx : a$, folgends der kleine Sector EAG oder das Element der Fläche $y^2dx : 2a$. Nun ist für die Spiral-Linie (§. 312. P.).

$$ax = by$$

$$a^2x^2 : b^2 = y^2$$

$$y^2dx : 2a = ax^2dx : 2bb$$

$$\int y^2dx : 2a = ax^3 : 6bb$$

Wenn ihr für x die gantze Peripherie b setzet, so kommet für den Raum, den die gantze Spiral-Linie einschliesset, $\frac{1}{6}ab$.

Der 1. Zusatz.

116. Da nun der umbschriebene Circul $\frac{1}{2}ab$ ist, so verhält sich die Spiral-Fläche zu ihm wie $\frac{1}{6}ab$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie 1 zu 3.

Der 2. Zusatz.

117. Für unendliche Spiral-Linien ist

$$a^mx^n = b^ny^m \quad (\text{§. 312. R. I.})$$

$$ax^{n:m} : b^{n:m} = y$$

$$a^2x^{2n:m} : b^{2n:m} = y^2$$

$$\int y^2dx : 2a = max^{2n+m,:m} : (4n+2m)b^{2n:m}$$

Wenn ihr nun für x die gantze Peripherie b setzet, so bekommet ihr $mab^{2n+m,:m} : (4n+2m)$ $b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$.

Der 3. Zusatz.

118. Dannenhero verhält sich überhaupt die Spiral-Fläche zu dem umbschriebenen Circul wie $mab : (4n+2m)$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie $2m$ zu $4n+2m$, oder wie m zu $2n+m$.

Der 4. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 78. 119. Setzet, daß der Bogen BC sich zu EC verhalten solle, wie die Abscisse in einer algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate.

Und es sey der Bogen $BC = x$, $AE = y$, $AC = r$; so ist $EC = r - y$, $CD = dx$ und

$$AC : CD = AE : EG$$
$$r \quad dx \quad y \quad ydx:r$$

folgends das Element oder der Sector AEG $\frac{1}{2}y^2dx:r$. Setzet nun es sey BC die Abscisse, EC die Semiordinate einer Parabel, so ist

$$dx = r^2 - 2ry + yy$$
$$dx = (2ydy - 2rdy) : a$$
$$y^2dx:r = (y^3dy - ry^2dy) : ar$$
$$\int y^2dx:r = y^4 : 4ar - y^3 : 3a$$

Der

Der 5. Zusatz

120. Ihr könnet auch den Raum BFC finden, wenn ihr das Element GDCE suchet, welches ihr findet, wenn ihr CD+EG mit $\frac{1}{2}$ FC multipliciret, weil ihr es als ein Trapezium ansehen könnet, dessen bases CD und EG parallel sind. Nun ist CD+EG $=$ $dx+y$ $dx:r$ und $\frac{1}{2}$FC $=$ $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}y$. Derowegen das verlangte Element $(r^2dx-y^2dx):2r$. Nehmet nun wie in dem vorigen Exempel (§.119) $dx=(2ydy-2rdy):a$, so ist das besondere Element $(ry^2dy+r^2ydy-y^3dy-r^3dy):ar$, dessen Integrale $y^3:3a+ry^2:2a-y^4:4ar-r^2y:a$ den verlangten Raum giebet. Tab. IX. Fig. 78.

Die 17. Aufgabe.

121. Die Fläche eines jeden Cörpers zu finden / der erzeuget wird / indem eine krumme Linie sich umb ihre Axe beweget. Tab. IX. Fig. 75.

Auflösung.

Setzet die Verhältnis des halben Diameters zu der Peripherie $=r:c$, die Abscisse AP $=x$, die Semiordinate PM $=y$, so ist Pp $=dx$, mR $=dy$, Mm $=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (§.172. Geom.) und die Peripherie, welche mit PM beschrieben wird, $=cy:r$. Daher das Element der Fläche $cy\sqrt{(dx^2+dy^2)}:r$. Wenn ihr nun für dx^2 oder dy^2 seinen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie setzet, und das Element hernach

integriret; so kommet der Inhalt eines Stückes von der verlangten Fläche heraus.

Der 1. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 75.

122. Es sey AMP ein Triangel, dessen Höhe $= r$, die Grundlinie $= a$, so ist $ay = rx$ (§. 156. Geom. & §. 144. P. I. Algeb.) und dannenhero

$$ady : r = dx$$

$$a^2dy^2 : r^2 = dx^2$$

$$cyV(dx^2+dy^2) : r = cyV(a^2dy^2+r^2dy^2) : r^2$$

$$cyV(dx^2+dy^2) : r = cydyV(a^2+r^2) : r^2$$

$$\int cyV(dx^2+dy^2) : r = cy^2(a^2+r^2) : 2r^2$$

Setzet für y die Höhe r; so kommet die Fläche des Coni heraus $\frac{1}{2}cV(r^2+a^2)$. Da nun $V(r^2+a^2)$ seine Seite ist; so sehet ihr, daß die Kegel-Fläche einem Triangel gleich sey, dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche des Kegels und die Höhe seiner Seite gleich ist.

Der 2. Zusatz.

123. Wenn ihr für die beschreibende Linie einen halben Circul annehmet, so findet ihr die Kugel-Fläche. Da nun im Circul

$$2rx - xx = y^2$$

so ist $2rdx - 2xdx = 2ydy$

$$(2rdx - 2xdx) : 2y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : y^2 = dy^2$$

$$cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy\sqrt{(dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} : r = cy\sqrt{(2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2d^2}, :, 2rx - xx) : r = cy\sqrt{(r^2dx^2 : y^2)} : r = cyrdx : ry = cdx.$$

$$\int cdx = cx$$

Setzet für x, den Diameter $2r$, so ist die gantze Kugel-Fläche $2cr$.

Der 3. Zusatz.

124. Da nun die Fläche des grösten Circuls $\frac{1}{2}cr$; so ist die Fläche der Kugel viermahl so groß als ihr grösster Circul. Hingegen jedes Stücke der Kugel-Fläche verhält sich zu der gantzen wie cx zu $2cr$, das ist, wie x zu $2r$, oder die Höhe des Stückes der Kugel zu dem gantzen Diameter.

Der 4. Zusatz.

125. Es sey die beschreibende Linie eine Parabel, so findet ihr die Fläche eines Para-

bolischen After-Kegels. Da nun in der Parabel

$$adx = 2ydy$$

so ist $dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$

$cyV(dx^2+dy^2) : r = cyV(4y^2dy^2+a^2dy^2 : a^2) : r = cydyV(4yy+aa) : ar$

Setzet $V(4yy+aa) = v$

so ist $4yy+aa = v^2$

$8ydy = 2vdv$

$cydyV(4yy+aa) : ar = cv^2dv : 4ar$

$\int cv^2dv : 4ar = cv^3 : 12ar = (4cyy+caa)V(4yy+aa) : 12ar - \frac{ca^2}{12r}$ (§. 93).

Setzet r für y, so habet ihr die Fläche des ganzen After-Kegels $(4crr+caa)V(4rr+aa) : 12ar - ca^2 : 12r$.

Von der Rectification der krummen Linien.

Die 4. Erklärung.

126. Eine krumme Linie rectificiren heisset so viel als die Länge derselben finden.

Der

Der 1. Zusatz.

127. Wenn die beyden Semiordinaten P M und pm einander unendlich nahe sind, so ist der Bogen Mm das Element des Bogens AM, das ist, $V(dx^2+dy^2)$. Tab. IX. Fig 75.

Der 2. Zusatz.

128. Derowegen wenn ihr vor dx^2 oder dy^2 den Werth aus der Natur der krummen Linie setzet, und das besondere Element integriret; so habet ihr die krumme Linie oder ihren Bogen AM rectificiret.

Der 3. Zusatz.

129. Ihr könnet auch das Element Mm finden, wenn ihr setzet PM : TM $=$ dy : Mm.

Die 18. Aufgabe.

130. Die Parabel zu rectificiren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$adx = 2ydy$$

$$a^2dx^2 = 4y^2dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$V(dx^2+dy^2) = V(dy^2+4y^2dy^2 : a^2)$$

das ist $= dy\,V(aa+4y^2) : a$

Damit ihr nun dieses Element integriren könnet,

net, so ziehet (§. 95. P. I.) die Wurtzel aus $V(aa+4y^2)$. Es ist nemlich

$n = 2$, $m = 1$, $P = a^2$ $Q = 4y^2 : a^2$

$P^{m:n} = +a = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} a . 4y^2 : a^2 = +2y^2 : a = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{2} y^2 : a . 4y^2 : a^2 = -2y^4 : a^3 = C$

$\frac{m-2n}{3n} QC = -\frac{3}{6} - 2y^4 : a^3 . 4y^2 : a^2 = +4y^6 : a^5 = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} . 4y^6 : a^5 . 4y^2 : a^2 = -10y^8 : a^7$

u. s. w. unendlich fort.

Demnach ist $V(aa+4y^2) = a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y^8}{a^7}$ &c. und daher $dy\, V(aa+4y^2) : a = dy + \frac{2y^2 dy}{a^2} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} - \frac{10y^8}{a^8} dy$ &c. Deren Integral $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. Die Länge des Bogens exprimiret.

Die

Die 19. Aufgabe.

131. Die Parabel zu rectificiren, in welcher $ax^2 = y^3$.

Auflösung.

Weil $ax^2 = y^3$

so ist $2axdx = 3y^2dy$

$4a^2x^2dx^2 = 9y^4dy^2$

$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4a^2x^2 = 9ydy^2 : 4a$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{((9ydy^2+4ady^2) : 4a)} =$
$dy\sqrt{((9y+4a) : 4a)}$

Setzet $\sqrt{((9y+4a) : 4a)} = v$

so ist $9y+4a = 4av^2$

$9dy = 8avdv$

$dy\sqrt{(9y+4a, : 4a)} = \frac{8}{9}av^2dv$

$\int dy\sqrt{(9y+4a, : 4a)} = \frac{8}{27}av^3 =$
$\frac{8}{27}(9y+4, : 4)\sqrt{(9y+4, : 4)} = \frac{2}{27}(9y+4)^{\frac{3}{2}}$
$\sqrt{(9y+4)} = \frac{1}{27}(9y+4)\sqrt{(9y+4)} - \frac{8}{27}$ (§. 93.)
wenn $y = o$.

Die

Die 20. Aufgabe.

132. Unendliche Parabeln zu rectificiren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln ist

$y^n = a^{n-1} x = x$, wenn $a = 1$.

$n y^{n-1} dy = dx$

$n^2 y^{2n-2} dy^2 = dx^2$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(n^2 y^{2n-2} dy^2 + dy^2)} = dy \sqrt{(n^2 y^{2n} + 1)}$.

Ziehet nun aus $\sqrt{(1 + n^2 y^{2n-2})}$ die Wurtzel (§. 5 P. I.), und setzet der Kürtze halber $2n - 2 = r$, so ist in dem Nevvtonischen Lehrsatze $m = 1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = n^2 y^r$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} n^2 y^r = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} n^2 y^r \cdot n^2 y^r = -\frac{1}{8} n^4 y^{2r} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{8} n^4 y^{2r} \cdot n^2 y^r = +\frac{1}{16} n^6 y^{3r} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} n^6 y^{3r} \cdot n^2 y^r = -\frac{5}{128} n^8 y^{4r} =$ E &c.

Dem-

Demnach ist $dy\sqrt{(1+n^2y^{2n-2})} = dy + \frac{1}{2}n^2y^r dy - \frac{1}{8}n^4y^{2r}dy + \frac{1}{16}n^6y^{3r}dy - \frac{5}{128}n^8y^{4r}dy$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $y + \frac{n^2y^{r+1}}{2(r+1)} - \frac{n^4y^{2r+1}}{8(2r+1)} + \frac{n^6y^{3r+1}}{16(3r+1)} - \frac{5n^8y^{4r+1}}{128(4r+1)}$ u. s. w. unendlich fort, die Länge unendlicher Parabeln ausdrucket. Wollet ihr für r seinen Werth $2n-2$ in die Stelle setzen, so bekommet ihr $y + \frac{n^2y^{2n-1}}{2(2n-1)} - \frac{n^4y^{4n-3}}{8(4n-3)} + \frac{n^6y^{6n-5}}{16(6n-5)} - \frac{5n^8y^{8n-7}}{128(8n-7)}$ &c.

Es sey z. E. $n = 2$, so bekommet ihr $y + \frac{4y^3}{3.2} - \frac{16y^5}{8.5} + \frac{4.16y^7}{16.7}$, &c. das ist, $y + \frac{2y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{4y^7}{7}$ &c. für die Apollonische Parabel, welche Reihe mit der oben gefundenen übereinkommet, wenn ihr $a = 1$ setzet.

Die 21. Aufgabe.

133. Aus dem gegebenen Tangente eines Circul-Bogens den Bogen zu finden.

Auflösung.

Es sey der Tangens $KB = x$, $BC = 1$, so ist $SK = dx$, $KC = \sqrt{(1+xx)}$, $SL = xdx : \sqrt{(1+xx)}$ wenn nemlich KC und SC einander Tab. IX. Fig. 76.

der unendlich nahe sind. Da nun bey L und B rechte Winckel sind (§. 48) und BKC = KSL, weil KCL unendlich kleine ist; so ist KC : BC = SK : KL (§. 183. Geom.) das ist:

$$\sqrt{(1+x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Ferner KC : KL = NC : Nn (§. 184. Geom.)

$$\sqrt{(1+x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 : \frac{dx}{1+x^2}$$

Wenn ihr nun dx durch $1+x^2$ würcklich dividiret, so bekommet ihr für das Element Nn des Bogens BN $dx - x^2\,dx + x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx - x^{10}\,dx$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ u. s. w. unendlich fort den Bogen BN exprimiret, dessen Tangens BK = x.

Der 1. Zusatz.

134. Der Tangens des Bogens von 45° ist dem Radio BC gleich, und also wird $x = 1$, folgends der Bogen von 45° oder der halbe Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. Setzet ihr aber den gantzen Diameter eines, so ist der Quadrante $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c.

Der 2. Zusatz.

135. Derowegen verhält sich das Quadrat des Diameters zu der Circul-Fläche wie der Diameter zu dem Quadranten von der Peripherie.

Die

Anmerckung.

136. Ihr hättet auf eben diese Art den Circul qvadriren können.

Die 22. Aufgabe.

137. Aus dem gegebenen Bogen eines Circuls/ der kleiner ist als ein Qvadrant/ den Tangentem zu finden.

Auflösung.

Wenn der Tangens x ist, so ist der Bogen $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. (§. 133).

Setzet $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. weil nun $-v + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. $= 0$ und

$$\left.\begin{array}{rl} x^3 = & a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \text{ &c.} \\ & + 3a^2cv^7 \text{ &c.} \\ x^5 = & + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \text{ &c.} \\ x^7 = & + a^7v^7 \text{ &c.} \end{array}\right\} \text{(§. 91. P. I.)}$$

so ist

$$\begin{array}{rl} -v = & -v \\ x = & av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ &c.} \\ -\frac{1}{3}x^3 = & -\frac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{ &c.} \\ & - a^2cv^7 \text{ &c.} \\ +\frac{1}{5}x^5 = & +\frac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{ &c.} \\ -\frac{1}{7}x^7 = & -\frac{1}{7}a^7v^7 \text{ &c.} \end{array}$$

demnach

$$a - 1 = 0 \qquad b - \frac{1}{3} = 0 \qquad c - a^2b + \frac{1}{5}a = 0$$

$$a = 1 \qquad b = \frac{1}{3} \qquad c = b - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

$$d - ab^2 - a^2c + a^4b - \tfrac{1}{7}a^7 = 0$$

$$d = b^2 + c + \tfrac{1}{7} - b = \tfrac{1}{9} + \frac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{15} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{9} = \frac{126+135-210}{945} = \frac{51}{945}$$

$$= \frac{17}{315}$$

Setzet nun diese gefundene Werthe für a, b, c, d &c. in die angenommene Reihe für den Tangentem; so bekommet ihr $x =$
$v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 + \frac{17}{315}v^7$ &c.

Die 23. Aufgabe.

138. Aus dem gegebenen Sinu eines Bogens den Bogen / der kleiner als ein Quadrant ist / zu finden.

Auflösung.

Wenn der halbe Diameter des Circuls r, der Sinus des Bogens, oder die Semiordinate y / der Sinus versus oder die Abscisse x ist; so ist die Æquation des Circuls

$$2rx - xx = yy$$

daher

daher $2rdx - 2xdx = 2ydy$

$dx = ydy : (r-x)$

$dx^2 = y^2dy^2 : (r^2 - 2rx + xx)$

das ist $= y^2dy^2 : (r^2 - y^2)$

$V(dx^2 + dy^2) = V(y^2dy^2 + r^2dy^2 - y^2dy^2 : : r^2 - y^2) = rdy : V(r^2 - y^2)$.

Damit dieses Element des Bogens zum integriren geschickt werde, so ziehet aus $1 : (r^2 - y^2)$ die Wurzel in der That (§. 95. P. I.). Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = r^2$, $Q = -y^2 : r^2$

$P^{m:n} = r^{-1} = 1 : r = A$

$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{y^2}{2r^3} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{2r^3} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{3y^4}{8r^5} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{3y^4}{8r^5} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{5y^6}{16r^7} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{5y^6}{16r^7} \cdot -\frac{y^2}{r^2} = +\frac{35y^8}{128r^9} = E$

u. s. w. unendlich fort.

Also ist $rdy(r^2 - y^2)^{-1:2} = dy + \frac{y^2dy}{2r^2} + \frac{3y^4dy}{8r^4}$

$+\frac{5y^6\,dy}{16r^6}+\frac{35y^8\,dy}{128r^8}$ &c. dessen Integral $y+\frac{y^3}{6r^2}+\frac{3y^5}{40r^4}+\frac{5y^7}{112r^6}+\frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. den verlangten Bogen durch seinen Sinum ausdrucket. Wenn ihr besser sehen wollet, wie die Reihe unendlich fortgehet, so nennet das erste Glied A, das andere B, das dritte C u. s. w. so findet ihr $y+\frac{1.1.y^2}{2.3r^2}A+\frac{3.3y^2}{4.5r^2}B+\frac{5.5y^2}{6.7r^2}C+\frac{7.7y^2}{8.9r^2}D+\frac{9.9y^2}{10.11r^2}E$ &c.

Zusatz.

139. Weil der Bogen $v=y+\frac{y^3}{6r^2}+\frac{3y^5}{40r^4}+\frac{5y^7}{112r^6}+\frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. so findet ihr, wie in der 22. Aufgabe (§. 137) $y=v-\frac{v^3}{6r^2}+\frac{v^5}{120r^4}+\frac{v^7}{5040r^6}+\frac{v^9}{362880r^8}$ &c. $=v-\frac{v^3}{1.2.3r^2}+\frac{v^5}{1.2.3.4.5r^4}+\frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7r^6}+\frac{v^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9r^8}$ &c.

das ist, wenn ihr das erste Glied A, das andere B, das dritte C &c. setzet, $y = v - \frac{v^2 A}{2.3r^2} + \frac{v^2 B}{4.5r^2} + \frac{v^2 C}{6.7r^2} + \frac{v^2 D}{8.9r^2}$ &c.

Die 24. Aufgabe.

140. Aus dem gegebenen Sinu verso den Bogen des Circuls zu finden.

Auflösung.

Wenn der Diameter des Circuls $2r$, die Abscisse oder der Sinus versus $= x$ ist, so ist für den Circul

$$2rx - xx = yy$$

$$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$(rdx - xdx) : y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : y^2 = dy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} = \sqrt{((2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} = r$$

$dx : \sqrt{(2rx - xx)} = rdx\,(2rx - x^2)^{-1:2}$, oder wenn ihr $2r = 1$ setzet, $\frac{1}{2}dx\,(x - x^2)^{-1:2}$. Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, so ziehet aus $x - x^2$ die Wurtzel in der That, (§. 95. P. I.).

Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = x$, $Q = -x$, und demnach

$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$

$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} x^{-1:2} - x = \frac{1}{2} x^{1:2} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} x^{1:2} - x = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^{3:2} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^{3:2} - x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{5:2} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{5:2} - x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^{7:2}$ &c.

Daher ist $\frac{1}{2} dx : V(x - xx) = \frac{1}{2} x^{-1:2} dx + \frac{1}{4} x^{1:2} dx + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4} x^{3:2} dx + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 6} x^{5:2} dx + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^{7:2} dx$ &c. und folgends der Bogen

$AP = x^{1:2} + \frac{1}{2 \cdot 3} x^{3:2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^{5:2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^{7:2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} x^{9:2}$ &c. oder

$Vx(1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} x^4$ &c.

Zu

Zusatz.

141. Wollet ihr den Sinum versum durch den Bogen ausdrucken, so werdet ihr auf die Art, wie oben (§. 137) finden $x = \frac{v^2}{1.2} - \frac{v^4}{1.2.3.4} + \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c. = (wenn ihr Das erste Glied A, das andere B u. s. w. setzet) $\frac{v^2}{1.2} - \frac{v^2 A}{3.4} + \frac{v^2 B}{5.6} - \frac{v^2 C}{7.8}$ &c.

Von der Cubatur der Cörper.

Die 5. Erklärung.

142. Cubiren heisset den Inhalt eines Cörpers finden.

Der 1. Zusatz.

143. Wenn ein Cörper erzeuget wird, in dem eine Figur sich umb ihre Axe herumb beweget, so beschreibet jede Semiordinate einen Circul und dannenhero ist das Element desselben das Product aus einem Circul, der mit der Semiordinate beschrieben wird, in die Differential der Abscisse. Wenn ihr demnach die Verhältnis des Radii zu der Peripherie setzet $r : p$, so ist die Peripherie des gedachten Circuls $py : r$ und der Inhalt $py^2 : 2r$ (§. 162. Geom.), folgends das Element $py^2 dx : 2r$.

Der 2. Zusatz.

144. Wenn ihr demnach den Werth von y^2 durch x aus der Gleichung für die gegebene Figur setzet und das Element integriret; so habet ihr den verlangten Inhalt des Cörpers.

Die 25. Aufgabe.

145. Den Conum zu cubiren.

Auflösung.

Weil der Conus von einem Triangel beschrieben wird (§. 35. Geom.), so habet ihr (wenn die Höhe des Triangels a, die Grundlinie r ist)

$$rx = ay$$

$$r^2x^2 : a^2 = y^2$$

$$py^2dx : 2r = prx^2dx : 2a^2$$

$$\int py^2dx : 2r = prx^3 : 6a^2$$

Wenn ihr den gantzen Kegel verlanget, so setzet a für x, und ihr findet seinen Inhalt $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}pra = \frac{1}{2}pr.\frac{1}{3}a$, das ist, wenn ihr die Grundfläche $\frac{1}{2}pr$ durch den dritten Theil der Höhe $\frac{1}{3}a$ multipliciret.

Die 26. Aufgabe.

146. Die Kugel zu cubiren.

Auf-

Auflösung.

Die Kugel wird von einem halben Circul beschrieben (§. 27. Geom.), in welchem

$$2rx - xx = yy$$

daher ist $py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$

$$\int py^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r$$

Wenn ihr die gantze Kugel verlanget, so setzet $2r$ oder den Diameter für x oder die Höhe des Kugel-Stückes, und ihr bekommet für ihren Inhalt $2pr^2 - 8pr^2 : 6 = 4pr^2 : 6 = \frac{2}{3}pr^2$.

Zusatz.

147. Der Inhalt eines umbschriebenen Cylinders, dessen Höhe nemlich dem Diameter, die Grund-Fläche dem grösten Circul der Kugel gleichet, ist pr^2, und demnach verhält er sich zur Kugel wie pr^2 zu $\frac{2}{3}pr^2$, das ist, wie 3 zu 2.

Die 27. Aufgabe.

148. Einen parabolischen Afters-Kegel zu cubiren.

Auflösung.

In der Parabel ist

$$y^2 = ax$$

daher $py^2dx : 2r = apxdx : 2r$

$$\int py^2 dx : 2r = apx^2 : 4r = py^2 x : 4r$$

Wenn die Höhe des gantzen Kegels b und der halbe Diameter in der Grundfläche r ist; so ist der Inhalt desselben $bpr^2 : 4r = \frac{1}{4} bpr$.

Zusatz.

149. Da nun der umbschriebene Cylinder $\frac{1}{2} bpr$ ist, so verhält sich dieser zu dem paraboliſchen After-Kegel wie $\frac{1}{2} bpr$ zu $\frac{1}{4} bpr$, das ist, wie 2 zu 1.

Die 28. Aufgabe.

150. Unendliche paraboliſche After-Kegel auf einmahl zu cubiren.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= 1$, so ist für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y^2 = x^{2:m}$$

$$\int py^2 dx : 2r = px^{2:m} dx : 2r$$

$$\int py^2 dx : 2r = mx^{2+m:m} : (4+2m) r = mp$$
$$xy^2 : (2m+4) r.$$

Die 29. Aufgabe.

151. Eine elliptiſche After-Kugel zu cubiren.

Aufs

Auflösung.

Es sey der kleine Diameter in der Ellipsi $2r$, der grosse $= 2a$, so ist

$$yy = rr - r^2x^2 : a^2 \quad \text{(253.P.I.)}$$

$$cy^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}crdx - crx^2dx : 2a^2$$

$$\int cy^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}crx - crx^3 : 6a^2.$$

Setzet für x die gantze grosse Axe $2a$, so kommet der Inhalt des gantzen Cörpers $acr - \frac{2}{6}acr = \frac{2}{3}acr$.

Der 1. Zusatz.

152. Der umbschriebene Cylinder ist acr und demnach verhält er sich zu der elliptischen After-Kugel wie acr zu $\frac{2}{3}acr$, das ist, wie 1 zu $\frac{2}{3}$, oder 3 zu 2.

Der 2. Zusatz.

153. Die Kugel, deren Diameter dem grossen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $2a^3c : 3r$ (§. 147). Demnach verhält sie sich zu der elliptischen After-Kugel wie $2a^3c : 3r$ zu $\frac{2}{3}acr$ das ist, wie a^2 zu r^2, oder wie das Qvadrat der grossen Axe zu dem Qvadrate der kleinen.

Der 3. Zusatz

154. Die Kugel, deren Diameter dem kleinen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $\frac{2}{3}cr^2$.

Des

Derowegen verhält sie sich zu der elliptischen After-Kugel wie $\frac{2}{3} cr^2$ zu $\frac{2}{3} acr$, das ist wie r zu a, oder die kleine Axe zu der grossen.

Die 30. Aufgabe.

155. Einen hyperbolischen After-Regel zu cubiren.

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe $= 2a$, die kleine Axe $= 2r$, die Abscisse $= x$, die Semiordinate $= y$, so ist (§. 269. P. I.)

$$rr : aa = y^2 : 2ax + xx$$

$$y^2 = (2ar^2x + r^2x^2) : a^2$$

$$cy^2dx : 2r = crxdx : a + crx^2dx : 2a^2$$

$$\int cy^2dx : 2r = crx^2 : 2a + crx^3 : 6a^2$$

Setzet für x die gantze Höhe des Afters Regels b, so kommet sein Inhalt $crb^2 : 2a + crb^3 : 6a^2$.

Die 31. Aufgabe.

156. Den Inhalt des Cörpers zu finden/ der erzeuget wird / in dem der Raum zwischen der logarithmischen Linie MI und der geraden Linie PH sich umb PH herumb beweget.

Tab. IX. Fig. 81.

Aufa

Auflösung.

In der logarithmischen Linie, deren Subtangens $= a$, ist

$$y\,dx = a\,dy \quad \text{(§. 112)}$$

$$dx = a\,dy : y$$

$$cy^2\,dx : 2r = acy^2\,dy : 2ry = acy\,dy : 2r$$

$$\int cy^2\,dx : 2r = acy^2 : 4r$$

Nehmet r für die letzte Semiordinate AB an, so ist der Inhalt des gantzen Cörpers $\frac{1}{4}$ acr, der durch die Bewegung des unendlichen Raumes IBAfI beschrieben wird.

Die 32. Aufgabe

157. Den Inhalt eines Cörpers zu finden/ der beschrieben wird/ indem sich eine halbe Parabel ANS umb ihre Semiordinate beweget.

Auflösung.

In diesem Falle ist das Element gleich dem Producte aus einem Circul, der mit MT der Differentz zwischen der Abscisse AP und AS beschrieben wird, in die Differential der Semiordinate. Setzet nun AS $= r$, NS $= b$, AP $= x$, so ist MT $= r - x$. Wenn nun die Verhältnis des Radii zur Peripherie $r : c$, so findet ihr die Peripherie, so mit MT be-

Tab. IX. Fig. 75.

schrie-

schrieben worden $(rc - cx) : r$, folgends den Circul $(r^2c - 2rcx + cx^2) : 2r$. Dannenhero ist das Element $(r_2c\,dy - 2rcx\,dy + cx_2dy) : 2r$. Nun ist in der Parabel, wenn der Parameter $= 1$, $y^2 = x$ und $y^4 = x^2$. Daher das Element $\frac{1}{2}rc\,dy - cy_2dy + cy^4dy : 2r$, dessen Integral $\frac{1}{2}rcy - \frac{1}{3}cy^3 + cy^5 : 10r$ das Stücke des Cörpers exprimiret, welches von MN T beschrieben worden.

Wenn ihr für y_2 seinen Werth x setzet, so habet ihr für eben dasselbe Stücke $\frac{1}{2}rcy - \frac{1}{3}cx\,y + cx^2y : 10r$. Setzet nun ferner r für x und b für y; so bekommet ihr für den gantzen Cörper $\frac{1}{2}rcb - \frac{1}{3}crb + cr^2b : 10r = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10})bcr = (30 - 20 + 6)bcr = \frac{4}{15}bcr$.

60

Anmerckung.

158. Auf gleiche Weise könnet ihr den Inhalt der Cörper finden / wenn ihr setzet / daß sich eine Fläche umb eine andere Linie / als Z. E. umb den Tangentem oder die Subnormal-Linie beweget.

Von der verkehrten Methode der Tangentium.

Die 6. Erklärung.

159. **Die verkehrte Methode der TANGENTIUM** (Methodus Tangentium inversa) **ist diejenige / welche zeiget / wie man aus dem gegebenen** Subtangente, Tangente, **der Normal-Linie oder Subnormal-Linie** ꝛc. **die**

Glei-

Gleichung finden kan / welche die Natur der Linie erkläret.

Zusatz.

160. Setzet nemlich die gegebenen Linien ihrem Werthe gleich, darinnen die Differential-Grössen anzutreffen sind, so bekommet ihr die Differential-Gleichung für die gesuchte Linie. Wenn ihr nun selbige integriret, so bekommet ihr die gesuchte Gleichung.

Die 33. Aufgabe.

161. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangens $= 2yy : a$.

Auflösung.

Weil der Subtangens in einer jeden algebraischen Linie $= ydx : dy$, so ist

$$2y^2 : a = ydx : dy$$

$$2y^2 dy = aydx$$

$$2ydy = adx$$

$$y^2 = ax$$

Welche Gleichung zeiget, daß die verlangte Linie eine Parabel sey.

Anmerckung.

162. Hätte man gesagt / daß der Subtangens solte $2x$ seyn (ich setze aber beständig / wie vorhin / daß x allezeit die Abscisse / y die Semiordinate bedeute); so bekämet ihr

$ydx = 2xdy$. Wollet ihr nun diese Gleichung zum integriren geschickt machen / so sehet ihr / daß / wenn ihr x durch y exprimiren wollet / ihr y^2 durch eine beständige Grösse dividiren müsset / und dannenhero für $2x$ annehmen $2y^2 : a$.

Die 34. Aufgabe.

163. Eine krumme Linie zu finden / deren Subnormal-Linie beständig von einer Grösse ist / z. E. $= a$.

Auflösung.

Die Subnormal-Linie ist $ydy : dx$ (§. 46). Demnach

$$ydy : dx = a$$

$$ydy = adx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$

$$y_2 = 2ax$$

Also ist die verlangte Linie eine Parabel, deren Parameter der doppelten Subnormal-Linie gleich ist.

Die 35. Aufgabe.

164. Eine krumme Linie zu finden / deren Subtangens die mittlere Proportional-Linie ist zwischen x und y.

Auf-

Auflösung.

Es ist $ydx : dy = \sqrt{xy}$

$ydx = dy\sqrt{xy} = x^{1:2} y^{1:2} dy$

$dx = y^{-1:2} x^{1:2} dy$

$x^{-1:2} dx = y^{-1:2} dy$

$2x^{1:2} = 2y^{1:2}$

$\sqrt{x} = \sqrt{y}$

$x = y$

Also ist die verlangte Figur ein gleichschenckslichter rechtwincklichter Triangel. Ihr könnet aber auch setzen

$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{y}$

so ist $x + 2\sqrt{ax} + a = y$

$2\sqrt{ax} = y - x - a$

$4ax = y^2 - 2yx + xx + 2ax - 2ay + aa$

$2ax - xx = y^2 - 2xy - 2ay + aa.$

oder $2xy + 2ay - y^2 = x^2 - 2ax + aa$

Dergleichen Gleichung auch heraus kommet, wenn ihr $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{y}$ setzet.

Die 36. Aufgabe.

165. Eine krumme Linie zu finden/ deren Subnormal-Linie $= r - x$.

Auflösung.

Es ist $ydy : dx = r - x$

$ydy = rdx - xdx$

$\frac{1}{2}y^2 = rx - \frac{1}{2}x^2$

$y^2 = 2rx - xx$

Also ist die verlangte Linie ein Circul, dessen Diameter $= 2r$.

Die 37. Aufgabe.

166. Eine Linie zu finden/ deren Subnormal-Linie $= \sqrt{ax}$.

Auflösung.

Es ist $ydy : dx = \sqrt{ax} = a^{1:2}x^{1:2}$

$ydy = a^{1:2}x^{1:2}dx$

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{ax^3}$

$y^2 = \frac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \frac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$

Also ist das Quadrat der Semiordinate in dieser Linie jederzeit einem parabolischen Raume gleich.

Die

Die 38. Aufgabe.

167. **Eine krumme Linie zu** construiren / **deren** Subtangens **einer unveränderlichen Linie gleich ist.**

Auflösung.

Es ist

$$\underline{ydx : dy = a}$$

$$dx = ay^{-1}\,dy$$

$$\int dx = \int ay^{-1}\,dy$$

Wenn ihr $ay^{-1}\,dy$ (§.82) integriren woltet, so käme heraus $ay^{0} : 0 = a : 0$, das ist, eine unendlich grosse Grösse. Und also gehet die Integration algebraisch nicht an. Da nun aber bekandt ist (§.61), daß die angenommene Eigenschaft der logarithmischen Linie zugehöret, in dieser aber die Abscissen x die Logarithmi der Semiordinaten sind (§.307. P.I.); so muß auch $\int ay^{-1}\,dy$ $(= x)$ der Logarithmus der Semiordinate seyn, und dannenhero könnet ihr jederzeit für die Integral von $ay^{-1}\,dy$ oder $ady : y$ den Logarithmum von y oder ly setzen. Es muß aber der Logarithmus in einer logarithmischen Linie genommen werden, deren Subtangens a ist.

Der 1. Zusatz.

168. Da nun die Differential eines Logarithmi $= ady : y$, so könnet ihr jetzt auch die

jenigen Grössen differentiiren, in welchen Logarithmi zu finden. Es sey Z. E. ly^n, so ist die Differential $nly^{n-1}ady:y$.

Der 2. Zusatz.

169. Es sey die Differential eines Logarithmi $= dy:(1+y)$; so ist der Logarithmus der Zahl $1+y = \int dy:(1+y)$. Nun ist $1:(1+y) = 1-y+y^2-y^3+y^4$ u. s. w. wie ihr es findet, wenn ihr in der That dividiret, und daher $dy:(1+y) = dy-ydy+y^2dy-y^3dy+y^4dy$ &c. Derowegen ist $\int dy:(1+y)$ oder der Logarithmus von der Zahl $1+y = y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c.

Der 3. Zusatz.

170. Weil nun $l = y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. so findet ihr (§. 137); $y = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4} + \frac{l^5}{1.2.3.4.5}$ &c.

Der 4. Zusatz.

171. Ihr sehet zugleich (§. 169), wie die Differentiale der Logarithmischen Grössen integriret werden, wenn man a für den Subtangentem der logarithmischen Linie annimmet. Es ist Z. E. $\int y^n dy:y = y^{n+1}:(n+1)a$, $\int ydy\sqrt{(aa+y^2)} = (aa+y^2)^{3:2}:3a$ u. s. w.

Anmerckung.

172. Wenn man die Differential-Gleichung nicht integriren kan / so suchet man dieselbe auf die Qvadratur oder Rectification des Circuls / oder Parabel / Hyperbel und Ellipsis zu reduciren / weil diese Linien bekandt sind / und ist vergnüget / wenn man sagen kan / daß die Construction der verlangten Linie von der Qvadratur oder Rectification einer von den gemeldeten Linien dependire: wovon ich noch einige Exempel hieher setzen muß. Ihr habet euch aber zu dem Ende alle Elemente der Flächen und Längen in den Kegelschnitten bekandt zu machen / damit ihr umb so viel leichter wahrnehmet / auf was für eine Qvadratur oder Rectification sich jeder vorkommender Fall reduciren lasse.

Die 39. Aufgabe.

173. Eine krumme Linie zu construiren / in welcher $dz = qdu$.

Auflösung.

Es bedeutet q eine Grösse, die aus veränderlichen und unveränderlichen in Gestalt eines Bruches zusammen gesetzet ist. Beschreibet in unendlichen Fällen die unter der gegebenen Gleichung begriffen sind, eine krumme Linie, deren Abscissen $= v$, die Semiordinaten $= aq$; so ist das Element dieser Linie $aqdu$. Wenn ihr nun dieses durch a dividiret, so bekommet qdu. Derowegen richtet auf eben der Axe für die Abscissen u andere Semiordinaten auf, die $= \int qdu$, das ist, dem Raume gleich sind, der zwischen dieser krummen Linie und ihren Coordinaten enthalten, wenn man ihn durch eine unveränderliche Grösse a dividiret, so bekommet ihr die Linie, deren Differential-Gleichung $dz = qdu$.

Der 1. Zusatz.

174. Es sey $ydx = ady$ oder $dx = ady : y$, so sind die Semiordinaten der Linie von deren Qvadratur die Construction dependiret / $aa : y$. Da nun die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten (§. 283. P. I.) $aa = zy$. So erkennet ihr daraus die Art der Linie.

Der 2. Zusatz.

175. Wenn in der verlangten Linie der Subtangens $= y\sqrt{(aa+yy)} : a$, so ist $dx = dy\sqrt{(aa+yy)} : a$. Also sind die Semiordinaten der Linie, von deren Qvadratur die Constructiou dependiret, $\sqrt{(aa+yy)}$. Woraus ihr abermahl erkennet, daß es eine gleichseitige Hyperbel sey.

ENDE

des dritten Theiles.

Der

Der vierdte Theil
Von den
Anfangs-Gründen
Der
Exponential- und Differentio-Differential-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

176.

Die Exponential-Rechnung bestehet im Differentiiren und Integriren solcher Grössen / die einen veränderlichen Exponenten haben / als x^x, a^x / und Exponential-Grössen genennet werden.

Die 1. Aufgabe.

177. Eine Exponential-Grösse zu differentiiren.

Auflösung.

Die gantze Kunst kommet darauf an, daß man die Exponential-Grössen auf logarithmische reduciret, und sie (§. 168) differentiiret. Setzet nemlich

$$x^y = z$$

so ist $y lx = lz$

$lx dy + y dx : x = dz : z$ (§. 168)

$z (lx dy + y dx : x) = dz$

das ist $x^y (lx dy + y dx : x) = dz$

oder $x^y lx dy + y x^{y-1} dx = dz$

Setzet abermahl

$x^y = v$

so ist $x^y lv = lz$

$(x^y lx dy + y x^{y-1} dx) lv + x^y dv : v = dz : z$

$z(x^y lx dy + y x^{y-1} dx) lv + z x^y dv : v = z$

$x^y \; x^y \; x^y$

$v \; x \; lx lv dy + v \; y x^{y-1} lv dx + v \; v^{-1} x^y dv$

$= dz$

Auf gleiche Weise verfahret ihr in andern Fällen.

Die 2. Erklärung.

178. Eine Exponential-Linie wird genennet eine krumme Linie / welche durch eine Exponential-Gleichung erkläret wird / als wenn $x^x = y$.

Zusatz.

179. Wenn ihr die Exponential-Gleichung differentiiret (§. 177) und den Werth von dx in dem Differential-Werthe des Subtangentis und der Subnormal-Linie substituiret; so findet ihr wie in den algebraischen Linien ihren Subtangentem und Subnormal-Linie. Es sey z. E.

$x^x = y$ so ist

$ylxdx + ydx = dy$

$dx = dy : (ylx + y)$

$ydx : dy = ydy : (ylx + y)\,dy = 1 : (1 + lx)$

Für die Subnormal-Linie ist

$ydy : dx = (y^2 lxdx + y^2 dx) : dx = y^2 lx + y^2 = y^2 (lx + 1)$

Die 2. Aufgabe.

180. Die Differential einer logarithmischen Grösse zu integriren.

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $xlxdx$ integriren. Setzet

$x = 1 + y$

So ist $lx = l(1 + y)$

dx

$$dx = dy$$

$$xlxdx = l(1+y)(1+y)dy.$$

Nun ist $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. Derowegen $l(1+y)(1+y)dy = (1+y)dy(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.) = (wenn man in der That multiplicirt.)

$$ydy - \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1}{3}y^3dy - \frac{1}{4}y^4dy + \frac{1}{5}y^5dy \text{ &c.}$$
$$+ y^2dy - \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy - \frac{1}{4}y^5dy \text{ &c.}$$

das ist $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

folgends die verlangte Integral $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{1}y^2 + \frac{1}{1.2}y^3 - \frac{1}{1.2.3}y^4 + \frac{1}{2.3.4}y^5 - \frac{1}{3.4.5}y^6$ &c. in welcher Reihe $y = x - 1$.

Auf gleiche Manier könnet ihr in anderen Fällen verfahren.

Die 3. Aufgabe.

181. Eine Exponential-Grösse zu integriren.

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $(1+y)^{1+y}dy$ integriren. Setzet

(1+

$$(1+y)^{1+y} = 1+v$$

so ist $(1+y)\,l(1+y) = l(1+v)$

folgends (§. 169).

$$y+\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{12}y^4-\tfrac{1}{20}y^5 \text{ &c.} = v-\tfrac{1}{2}v^2+\tfrac{1}{3}v^3-\tfrac{1}{4}v^4+\tfrac{1}{5}v^5 \text{ &c.}$$

Setzet ferner

$$v = y+ky^2+my^3+ny^4+py^5 \text{ &c.}$$

so ist
$$v^2 = +y^2+2ky^3+k^2y^4+2kmy^5 \text{ &c.}$$
$$+2my^4+2ny^5 \text{ &c.}$$
$$v^3 = +y^3+3ky^4+3k^2y^5 \text{ &c.}$$
$$+3my^5$$
$$v^4 = +y^4+4ky^5 \text{ &c.}$$
$$v^5 = y^5 \text{ &c.}$$

(§. 91. P. I)

Daher

$$v = y+ky^2+my^3+ny^4+py^5 \text{ &c.}$$
$$-\tfrac{1}{2}v^2 = -\tfrac{1}{2}y^2-ky^3-\tfrac{1}{2}k^2y^4-kmy^5 \text{ &c.}$$
$$-my^4-ny^5$$
$$+\tfrac{1}{3}v^3 = +\tfrac{1}{3}y^3+ky^4+k^2y^5 \text{ &c.}$$
$$+my^5$$
$$-\tfrac{1}{4}v^4 = -\tfrac{1}{4}y^4-ky^5 \text{ &c.}$$
$$+\tfrac{1}{5}v^5 = +\tfrac{1}{5}y^5 \text{ &c.}$$
$$0 = -y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{6}y^3-\tfrac{1}{12}y^4+\tfrac{1}{20}y^5 \text{ &c.}$$

Man

Man bekommet demnach

$$1-1=0 \qquad k-\tfrac{2}{2}=0 \qquad m-k+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}=0$$

$$1=1 \qquad k=1 \qquad m=1-\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{2}$$

$$n-\tfrac{1}{2}k^2-m+k-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{12}=0$$

$$n-\tfrac{1}{2}-\tfrac{k}{2}+1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{12}=0$$

$$n=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{4}{12}=\tfrac{1}{3}$$

$$p-km-n+k^2+m-k+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{20}=0$$

$$p=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-1-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{20}$$

$$p=\tfrac{1}{3}-\tfrac{5}{20}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{4}{12}-\tfrac{3}{12}=\tfrac{1}{12}$$

Demnach ist $(1+y)^{1+y}=1+v=1+y+y^2+\tfrac{1}{2}y^3+\tfrac{1}{3}y^4+\tfrac{1}{12}y^5$ &c. folgends $(1+y)^{1+y}dy=dy+ydy+y^2dy+\tfrac{1}{2}y^3dy+\tfrac{1}{3}y^4dy+\tfrac{1}{12}y^5dy$ &c. Und daher $\int(1+y)^{1+y}dy=y+\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{8}y^4+\tfrac{1}{15}y^5+\tfrac{1}{72}y^6$ &c.

Zusatz.

182. Wenn ihr die Differential einer Exponential-Grösse integriren könnet, so könnet ihr auch die Exponential-Linien qvadriren.

Die 3. Erklärung

183. Differentio-differentiiren heisset so viel als die Differential von einer Differential-Grösse finden.

Zus

Zusatz.

184. Wenn die Differential dx ist, so nennet ihre Differential oder die Differentio-Differential von x, ddx; die Differential von ddx aber $dddx$ u. s. w.

Die 4. Aufgabe.

185. Eine jede gegebene Differential-Grösse von neuem zu differentiiren.

Auflösung.

Es geschiehet nach den Regeln (§. 13. &seqq.) nach welchen die veränderlichen Grössen differentiiret werden, nur daß man eine Differential-Grösse meistentheils als eine unveränderliche annimmet und daher auch die andere Differential vor nichts hält (§. 4).

Z. E. Die andere Differential von xdx findet ihr $dx^2 + xddx$ (§. 16); $d(1 : dx) = -\frac{ddx}{dx^2}$ (§. 24); $d(ydy : dx) = (dy^2 - yddy) : dx$, wenn ihr dx unveränderlich annehmet, hingegen $= (dy^2dx - ydyddx) : dx^2 = dy^2 : dx - ydyddx : dx^2$ (§. 24); $dV(dx^2 + dy^2) = dyddy : V(dx^2 + dy^2)$ wenn dx unveränderlich; hingegen $dxddx : V(dx^2 + dy^2)$, wenn dy unveränderlich (§. 20) u. s. w.

Anmerckung.

186. Wenn die Rechnung auf gewisse Fälle appliciret wird / so ist nicht schweer zu sehen / welche Differential ihr für unveränderlich annehmen könnet.

Die

Die 4. Erklärung.

Tab. X. Fig. 86.

187. Wenn eine krumme Linie AFK anfangs die hohle/hernach die erhabene Seite gegen die Axe AE kehret / und immer in einem mit der Axe fortgehet / so heisset der Punct F/ wo die Wendung geschiehet/ der Wendungs-Punct; hingegen der Wiederkehr-Punct/ wenn sie wieder zurücke gegen die Axe kehret. Im Lateinischen nennet man diese Puncte: Puncta flexus contrarii.

Der 1. Zusatz

188. Wenn die krumme Linie einen Wendungs-Punct hat, so ist klar, daß die Linie AT zunimmet mit der Abscisse AP, bis diese in E kommet, denn so bald sich die Linie wendet, so nimmet die Linie AT wieder ab, und die Abscisse nimmet wie vorhin zu. Derowegen könnet ihr AL als die gröste Linie von ihrer Art ansehen.

Der 2. Zusatz.

189. Hingegen wenn die krumme Linie einen Wiederkehrungs-Punct hat, so wächset anfangs die Linie AT zugleich mit der Abscisse biß in L: nach diesem wenn die Linie sich wendet, nimmet die Linie AT zu, hingegen die Abscissen gehen wieder zurücke und nehmen ab, und dannenhero muß in diesem Falle die Linie AL die gröste von ihrer Art werden.

Der

Der 3. Zusatz.

190. Da nun $AL = (ydx : dy) - x$ (§. 36), so ist, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet, Tab. X. Fig. 86.

$$(dy^2dx - ydxddy) : dy^2 - dx = o$$

$$dy^2dx - ydxddy - dy^2dx = o$$

$$-yddy = o$$

$$ddy = o, \text{ oder } ddy = \infty \quad (\S. 64).$$

Der 4. Zusatz.

191. Wenn die Semiordinaten BM aus einem Puncte B gezogen sind, so ziehet Bm und BM unendlich nahe, und Bt auf Bm perpendicular: dann ist klar, daß an der hohlen Seite Bt grösser ist als BO, hingegen an der erhabenen kleiner wird. Derowegen ist in dem Wendungs-Puncte $tO = o$. Beschreibet nun aus dem Mittelpuncte B den Bogen TH und MR, so sind die Triangel mMR, MBT und THO einander ähnlich, und die Ausschnitte des Circuls sind, weil die Winckel MBm und HBT mit HBM einen rechten Winckel machen, auch einander ähnlich. Demnach ist (§. 183. Geom.). Tab. X. Fig. 87. 88.

$$mR : MR = BM : BT$$

$$dy \quad dx \quad y \quad ydx : dy$$

$$BM : BT = MR : TH$$

$y \quad ydx : dy \quad dx \quad dx^2 : dy$

BM : BT = TH : HO

daher MR : TH = TH : HO

$dx \quad dx^2 : dy \quad dx^2 : dy \quad dx^3 : dy^2$

Also ist die Differential von BT oder tH wenn ihr dx für unveränderlich annehmet, $= (xdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 185), dannenhero OH + tH = Ot = $(dx^3 + dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$. Da nun die Linie tO im Wendungs-Puncte nichts wird, so ist

$$(dx^3 + dxdy^2 - ydxddy) : dy^3 = 0$$

$$dx^2 + dy^2 - yddy = 0 \text{ oder} = \infty$$

Die 5. Aufgabe.

192. Den Wendungs-Punct in einer Linie zu finden / da die Semiordinaten mit einander parallel sind.

Auflösung.

Tab. X. Fig. 86. Weil in diesem Falle $ddy = 0$, so suchet diesen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie durch x, und ihr werdet daraus den Werth von AE, das ist, der Abscisse finden, welcher die aus dem Wendungs-Puncte F gezogene Semiordinate EF zugehöret.

Der 1. Zusatz.

193. Es sey $axx = xxy + aay$

so ist $2axdx = 2xydx + x^2dy + aady$

$2axdx - 2xydx = x^2dy + aady$

d.i. $2axdx - 2ax^3dx : (xx + aa) = x^2dy + aady$

$2a^3xdx : (xx + aa) = x^2dy + aady$

$2a^3xdx : (xx + aa)^2 = dy$

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet / so ist

$2a^3\,dx^2(xx + aa)^2 - (8a^5x^4dx^2 - 8a^5x^2dx^2) :$
$(x^2 + a^2)^4 = ddy = 0$

$2a^3x^2 + 2a^5 - 8a^3x^2 = 0$

$xx + aa - 4xx = 0$

$V\frac{1}{3}a^2 = x$

Setzet ihr diesen Werth in die Stelle von x in der Gleichung

$y = axx : (xx + aa)$

so ist $y = \frac{1}{2}a^3 : (\frac{1}{3}aa + aa) = \frac{1}{3}a^3 : (\frac{4}{3}aa)$
$= a^3 : 4aa = \frac{1}{4}a.$

Solchergestalt könnet ihr den Wendungs-Punct finden, auch wenn die krumme Linie nicht beschrieben ist.

Der 2. Zusatz.

194. Es sey

$$y - a = (x-a)^{3:5}$$

so ist $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-2:5}\,3dx$

$$ddy = -\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}\,dx^2 = 0$$

Wenn nemlich dx unveränderlich angenommen wird: folgends

$$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5} = 0$$

$$-6 = 0.$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, so setzet

$$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}\,dx^2 = \infty.$$

das ist $$-6dx^2 : 25\sqrt[5]{(x-a)^7} = \infty$$

so ist $$25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$$

$$x-a = 0$$

$$x = a$$

Der 3. Zusatz.

195. In der Parabel ist

$$ax = y^2$$

$$a^{1:2}x^{1:2} = y$$

$$\tfrac{1}{2}a^{1:2}x^{-1:2}dx = dy$$

$$-\tfrac{1}{4}a^{1:2}x^{-1:2}dx^2 = ddy = 0$$

$$-\tfrac{1}{4}a^{1:2} = 0$$

Setzet ferner

$$\tfrac{1}{2}a^{1:2}x^{-3:2}dx^2 = \infty$$

so ist $x^{3:2} = 0$

Da ihr nun keinen Werth von x findet, ihr möget $ddy = 0$ oder $ddy = \infty$ setzen; so hat die Parabel keinen Wendungs-Punct.

Die 6. Aufgabe.

196. Den Wendungs-Punct in einer krummen Linie zu finden/ deren Semiordinaten alle aus einem Puncte gezogen werden.

Auflösung.

Weil in diesem Falle $dx^2 + dy^2 - y\,ddy = 0$ (§. 191); so dörffet ihr nur aus der gegebenen Gleichung für die Linie den Werth von dy durch dx exprimiren und ihr werdet wie vorhin den Werth von x in unveränderlichen Grössen finden können.

Zusatz.

197. Es sey in der Conchoide des Nicomedis $BA = a$, $BC = b$, $CQ = z$, $CM = y$, so ist (§. 296. P. I.). Tab. IX. Fig. 79.

$$z + a = y$$

$$dz = dy$$

Ferner ist $BQ = V(zz - bb)$ und weil bey r und B rechte Winckel sind, die Winckel S und q aber, deren Unterscheid qCS unendlich klein ist, einander gleich seyn, (§. 183. Geom.)

$$BQ : BC = St : tq$$

$$V(zz-bb)\ b\ dz\ bdz : V(zz-bb)$$

Und weil die Ausschnitte Cqt und CMr ähnlich sind,

$$Cq : qt = CM : Mr$$

$$z\ bdz : V(zz-bb)\ z+a\ Mr$$

demnach ist $Mr = (z+a)\,bdz : z\,V(zz-bb) = dx$, folgends

$$(z+a)\,bdz = zdx\,V(zz-bb)$$

$$dz = dy = zdx\,V(zz-bb) : (bz+ab).$$

Wenn man demnach dx für unveränderlich annimmet, so ist $ddy = (2abz^2 - ab^3 + 2bz^3 - b^3z)\,dzdx : (ab+bz)^2\,V(z^2-b^2) - bzV(z^2-b^2) : (ab+bz)^2 = (2abz^2 - ab^3 + bz^3)\,dzdx : (ab+bz)^2\,V(z^2-b^2) =$ (wenn man für dz seinen Werth setzet), $(2abz^3 - ab^3z + bz^4)\,dx^2 : (ab+bz)^3$.

Setzet nun in der Gleichung $ydddy = dx^2 + dy^2$

dy^2 (§. 191) die gehörigen Werthe an ihre Stelle, so habet ihr

$$b(z+a)(2az^3-ab^2z+z^4)\,dx^2 : (ab+bz)^2 = dx^2+(z^4-b^2z^2)\,dx^2 : (ab+bz)^2$$

$$2az^3-ab^2z+z^4 = (ab+bz)^2+z^4-b^2z^2$$
$$= a^2b^2+2ab^2z+bz^2$$

$$2az^3-3ab^2z-a^2b^2 = 0$$

$$z^3-\tfrac{3}{2}b^2z-\tfrac{1}{2}ab^2 = 0 \qquad 2a$$

Suchet endlich aus dieser Gleichung die Wurzel (§. 336. P. I.). Wenn ihr diese mit a vermehret, so habet ihr die verlangte Linie CM ($= z+a$), welche den Wendungs-Punct determiniret.

Die 5. Erklärung.

198. Wenn eine krumme Linie BDF mit einem Faden überleget ist / so immer gleichviel gedehnet wird und die gerade Linie BA anfangs die krumme in B berühret, hernach aber immer nach und nach von der krummen abgezogen wird / so beschreibet der äussere Punct A eine andere krumme Linie AHR / und nennet man die krumme Linie BDF die Evolute der Linie AHR / die Theile des Fadens DH / RF &c. aber die RADIOS der Evolute. Tab. X. Fig. 89.

Der 1. Zusatz.

199. Wenn der Punct A in B fället und A

B ⊐ o, so ist DH oder der Radius der Evolute dem Bogen BD, sonst aber dem Unterscheide zwischen dem Bogen DB und der Linie AB gleich.

Der 2. Zusatz.

Tab. X. Fig. 89.

200. Ihr könnet jeden unendlich kleinen Bogen der Linie AHR als einen Circul-Bogen ansehen, der mit dem Radio DH, oder FR, &c. aus dem Mittel-Puncte D oder F &c. beschrieben worden, und demnach stehen die Radii der Evolute alle auf der Linie AHR perpendicular (§. 48).

Der 3. Zusatz.

201. Weil nur so lange ein Circul-Bogen beschrieben wird, als der Radius der Evolute DH mit einem unendlich kleinen Bogen in der Evolute BDF eine gerade Linie machet; so müssen alle Radii die Evolute BDF berühren (§. 28).

Die 7. Aufgabe.

Tab. X. Fig. 90.

202. Die Länge des Radii der Evolute MC zu finden, wenn die Semiordinaten PM der Linie AMD auf der Axe AB perpendicular stehen.

Auflösung.

Es sey die Semiordinate pm der anderen PM unendlich nahe, ingleichen der Radius C m dem Radio CM. Ziehet CE mit der Axe AB

AB parallel, bis sie die verlängerte Semiordinate in E erreichet. Weil bey R und E rechte Winckel sind, und RMm = EMC, indem EMG und CMm (§. 200) rechte Winckel seyn, so ist (§. 183. Geom.).

$$MR : Mm = ME : MC$$
$$dx \sqrt{(dx^2+dy^2)} : z = z\sqrt{(dx^2+dy^2)} : dx$$

Da nun der Mittelpunct in C ist, daraus der kleine Bogen Mm mit dem Radio CM beschrieben, und dieser unverändert bleibet, indem ME umb mR zunimmet; so muß die Differential des Radii CM in Ansehung der Differential mR der Linie ME nichts seyn. Nun ist die Differential des Radii CM, wenn ihr dx für unveränderlich (das ist in allen Puncten der Linie von gleicher Grösse) annehmet, $(dzdx^2 + dzdy^2 + zdydy) : dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

Derowegen habet ihr

$$dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 0$$

$$dzdx^2 + dzdy^2 = -zdyddy$$

$$\frac{(dzdx^2 + dzdy^2)}{dyddy} : -dyddy = z$$

das ist, weil $dz = dy$

$$(dx^2+dy^2) : -ddy = z.$$

Wenn ihr nun die Werthe von dy^2 und ddy durch x aus der Gleichung für die krumme Linie

nie exprimiret, so werdet ihr den Werth von z durch x finden.

Der 1. Zusatz.

203. In der Parabel ist

$$ax = y^2$$

daher $adx = 2ydy$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

das ist $adx^2 : 4x = dy^2$

Und wenn ihr dx für unveränderlich annehmet

$$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy.$$

Folgends $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (4xdx^2 + adx^2) x \sqrt{ax} : axdx^2 = (a+4x)\sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax} : a = z = y + 4xy : a = PM + PE$. Es ist aber $PM = y$ und daher $PE = 4xy : a = 4y^3 : aa$.

Tab. X. Fig. 90.

Der 2. Zusatz.

204. Es sey für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

so ist $my^{m-1}dy = dx$

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

(m

$(mm-m)y^{m-2}dy^2+my^{m-1}ddy = 0$

$(mm-m)y^{m-2}dy^2 = -my^{m-1}ddy$

$(m-1)y^{-1}dy^2 = -ddy$

das ist $(m-1)\ dy^2 : y = -ddy$. Demnach ist $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (ydx^2+ydy^2) : (m-1)\ dy^2$.

Nun ist $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2$. Derowegen wann ihr diesen Werth in die Stelle von dx^2 setzet, bekommet ihr

$(m^2y^{2m-1}\ dy^2+ydy^2) : (m-1)\ dy^2 = z$

$(m^2y^{2m-1}+y) : (m-1) = z$.

Setzet z. E. $m = 2$, so ist $4xV'x+V'x = z$. welche Gleichung mit der vorigen übereinkommet, wenn $a = 1$.

Anmerckung.

205. Wenn euch das Differentiiren beschwerlich fallen will; so brauchet den Vortheil/dadurch wie oben (§. 24. sqq) die Regeln zu differentiiren / zu finden/ angewiesen.

ENDE
des vierdten Theiles.

Anhang
zu
Der Algebra.
Darinnen
Ihr Nutzen in verschiedenen Wissenschaften durch Exempel gezeiget wird.

Die 1. Erklärung.

1.

DJe Geschwindigkeit / mit welcher sich ein Cörper beweget / ist die Verhältnis des Raumes zu der Zeit.

Zusatz.

2. Es sey der Raum = r, die Zeit = t, die Geschwindigkeit = c, so ist die Geschwindigkeit = $r : t$ und $r = tc$.

Die 2. Erklärung.

3. Die Materie eines Cörpers ist diejenige / welche mit ihm wieget und beweget wird.

Zusatz.

4. Daher ist sie seiner Schweere jederzeit proportional.

Die 3. Erklärung.

5. Die Grösse der Bewegung erwächset / wenn die Materie des Cörpers durch die

die Geschwindigkeit der Bewegung multipliciret wird.

Zusatz.

6. Es sey die Geschwindigkeit des Cörpers $= c$ seine Materie $= m$, so ist die Grösse der Bewegung $= mc$.

Die 1. Aufgabe.

7. Die Lehrsätze zu finden / nach welchen die Bewegungen zweyer Cörper / die sich die ganze Zeit ihrer Bewegung mit einerley Geschwindigkeit bewegen / verglichen werden.

Auflösung.

Es sey der eine Cörper A, seine Geschwindigkeit C, seine Materie M, die Zeit seiner Bewegung T, der Raum, den er durchlauffen R, die Grösse der Bewegung Q. Der andere Cörper a, seine Geschwindigkeit c, seine Materie m, die Zeit seiner Bewegung t, der Raum, den er durchlauffen, r, die Grösse seiner Bewegung q. So ist $C = R : T$ und $c = r : t$ (§. 2). $Q = CM$ und $q = cm$ (§. 6). Solchergestalt habet ihr

I. $C : c = R : r$

$$\frac{}{T} \quad \frac{}{t}$$

II. $Q : q = CM : cm$

Setzet $C = c$, so ist $R : T = r : t$ folgends

III. $R : r = T : t$

Se-

Setzet $Q = q$, so ist $CM = cm$. Folgends

IV. $C:c = m:M$.

Setzet ferner $T = t$, so ist

V. $R = r$.

Setzet $C = c$, so ist

VI. $M = m$.

Wiederumb weil $C:c = (R:T):(r:t)$ so ist $Cr = cR$, folgends

VII. $T:t = cR:Cr$.

VIII. $R:r = TC:tc$.

Setzet $T = t$, so ist $Cr = cR$. Folgends

IX. $C:c = R:r$.

Setzet $R = r$, so ist $CT = ct$. Folgends

X. $C:c = t:T$.

Weil $Q:q = CM:cm$, so ist $Qcm = qCM$, folgends

XI. $C:c = Qm:qM$.

XII. $M:m = Qc:qC$

Setzet $C = c$, so ist $Qm = qm$. Folgends

$Q:q = C:c$

Endlich weil

$C:c = (R:T):(r:t)$

$Q:q = CM:cm$

---

so ist $CQ:cq = tRCM:Trcm$

$CQTrcm = cqtRCM$

Cc

$QTrm = qtRM$

dannenhero ist

XIV. $Q:q = tRM:Trm$

XV.

XV. $T : t = qRM : QrM$
XVI. $R : r = QTm : qtM$
XVII. $M : m = QTr : qtR$.

Anmerckung.

8. Es ist nicht nöthig zu erinnern / wie die gefundenen Lehrsätze ausgesprochen werden / weil solches denen zur Gnüge bekandt seyn muß / die das vorhergehende verstanden. Aber wohl ist nöthig / daß ich ermahne / man solle sich diese Lehrsätze wohl bekandt machen / weil man sie in Auflösung anderer Aufgaben gar öfters von Nöthen hat. Mercket aber zugleich / wie man so viel Lehrsätze durch die Algebra gleichsam spielende heraus bringen kan / die sonst durch viele Umbwege zu erweisen und noch schweerer zu erfinden wären.

Die 2. Aufgabe.

9. Die Gesetze zu finden / nach welchen die schweeren Cörper in einem Raume da ihnen kein Wiederstand geschiehet / herunter fallen.

Auflösung.

I. Es ist aus der Erfahrung klar, daß, wenn ein schweerer Cörper herunter fället, seine Bewegung umb so viel geschwinder wird, je länger er fället. Daraus denn folget, daß die Schweere dem Cörper nach und nach einen neuen Druck geben muß, da die Würckung des ersten noch nicht vergangen, indem kein Wiederstand vorhanden. Da nun in den Höhen, in welchen wir es versuchen können, die Schweere der Cörper einerley gefunden wird; so können wir annehmen, daß die Schweere in jedem Augenblicke einen gleichkräftigen Druck dem Cörper gebe.

Es

Es sey also der Augenblick t, die Geschwindigkeit, welche der Cörper in einem erlanget c; so ist nach Verfliessung $2t$, die Geschwindigkeit $2c$, nach Verfliessung $3t$ ist sie $3c$ u. s. w. Nun verhalten sich die Raume, welche die Cörper durchlauffen, wie die Producte aus den Zeiten in die Geschwindigkeiten (§. 2). Daher ist der Raum, durch welchen der Cörper im ersten Augenblicke gefallen, tc; zu Ende des anderen Augenblickes ist sein Raum, den er durchgelauffen $4tc$; zu Ende des dritten $9tc$; zu Ende des vierdten $16tc$; zu Ende des fünften $25tc$ &c. Demnach verhalten sich die Räume gegen einander wie $tc : 4tc : 9tc : 16tc : 25tc$ &c. das ist, wie $1 : 4 : 9 : 16 : 25$ &c. oder die Quadrate der Zeiten.

II. Ziehet nun die Höhe, durch welche der Cörper im ersten Augenblicke gefallen von der Höhe ab, durch welche er in zweyen gefallen; so bleibet für den anderen Augenblick 3 übrig, eben so findet ihr für den dritten 5, für den vierdten 7, für den fünften 9 &c. Solchergestalt wird die Bewegung der schweeren Cörper nach den ungeraden Zahlen geschwinder gemacht.

III. Da nun $R : r = T^2 : t^2$, so ist $\sqrt{R} : \sqrt{r} = T : t$. Ihr könnet also die Zeiten durch die Wurtzeln des Raumes andeuten.

IV. Wenn ihr demnach in einer Parabel die Ab-

Abscissen für R annehmet, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$.

V. Wiederumb weil $R : r = C^2 : c^2$; so ist $\sqrt{R} : \sqrt{r} = C : c$. Ihr könnet also die Geschwindigkeit durch die Wurtzeln des Raumes ausdrucken.

VI. Dannenhero wenn die Abscissen in einer Parabel R sind, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$ und also $= C$.

Zusatz.

10. Wenn in dem Triangel AEI die Abscissen AB, AC &c. $= T$, die Semiordinaten BF, CG &c $= C$ angenommen werden; so sind die Triangel $= \frac{1}{2} TC = R$. Wenn ihr nun setzet, daß alle Ordinaten BF, CG, DH, EI einander gleich sind: so werden die Triangel Rectangula, deren Inhalt $= TC$. Da nun TC den Raum vorstellet, welchen der Cörper in der Zeit T mit der Geschwindigkeit C durchlauffen würde, die er zu Ende der Zeit hat, wenn er sie gleich anfangs hätte und stets dieselbe unverändert behielte; so ist klar, daß dieser Raum sich zu jenem verhält, wie TC zu $\frac{1}{2} TC$, das ist, wie 1 zu $\frac{1}{2}$, oder wie 2 zu 1. Tab. XI. Fig. 91.

Die 3. Aufgabe.

11. Aus der gegebenen Zeit / in welcher ein Cörper durch eine gewisse Höhe gefallen ist / zu finden, wie er in jedem Theile derselben Zeit gefallen.

Auflösung.

Es sey der erste Theil der Zeit 1, die Zahl der Theile m, der Raum in dem ersten Theile x; so ist der Raum in dem letzten $(2m-2)x+x$ (§. 9. & §. 69. Arithm.) und die Summe in allen Theilen der Zeit m^2x (§. 113. P. I. Algebr.). Setzet nun den gantzen Raum a, so ist

$$m^2x = a$$

$$x = a : m^2,$$

Es sey z. E. $a = 125$, $m = 5$ Secunden, so ist $x = 125 : 25 = 5$. Also ist der Cörper in der ersten Secunde 5, in der anderen 15, in der dritten 25, in der vierdten 35, in der fünften 45′′ gefallen.

Die 4. Aufgabe.

Tab. XI Fig. 92.

12. Es wird eine Kugel aus C nach der Linie DC wieder die Wand AB geworffen/ man sol den Winckel EDG finden/ welchen die Linie ED / nach welcher sie zurücke prallet/ mit AB machet. Wir wollen CDF den Einfalls-Winckel/ EDG aber den Reflexions-Winckel nennen.

Auflösung.

Lasset aus C und E die Perpendicular-Linien CF und EG fallen. Es sey $CF = a$, $EG = b$, $FG = c$, $DF = x$; so ist $DG = c-x$, $CD^2 = aa+xx$, $DE^2 = bb+cc-2cx+xx$. Da nun die Natur immer den kürtzesten Weg gehet, so muß die Kugel in D dergestalt zurücke prallen, daß sie bis E den kürtzesten Weg nimmet, welchen sie aus C durch das zurücke prallen von

der

der Fläche AB nehmen kan. Und demnach ist CD+DE die kleineste Grösse von ihrer Art; bildet euch demnach eine krumme Linie ein, deren Gleichung

$$\sqrt{(aa+xx)}+\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=y$$

so ist $xdx:\sqrt{(aa+xx)}+(xdx-cdx):\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=dy=o$ (§. 20. P. II)

$$x\sqrt{(bb+cc-2x+xx)}+(x-c)\sqrt{(aa+xx)}=o$$

$$x\sqrt{(bb+cc-2cx+xx)}=(c-x)\sqrt{(aa+xx)}$$

das ist FD. ED = DG. CD.

Folgends FD : CD = DG : DE. Setzet CD = DE; so ist auch DF = DG, folgends der Reflexions-Winckel EDG dem Einfalls-Winckel CDF gleich.

Zusatz.

13. Hieraus sehet ihr zugleich, daß, wenn ein Strahl des Lichtes CD auf einen Spiegel fället, er dergestalt in E reflectiret wird, daß der Reflexions-Winckel EDG dem Einfalls-Winckel CDF gleich ist.

Die 5. Aufgabe.

14. Aus der gegebenen Weite eines strahlenden Punctes A von dem Mittelpuncte B eines sphärischen Spiegels DEF den Punct zu finden / wo der reflectirte Strahl DC mit der Axe vereiniget wird. Tab. XI. Fig. 93.

Auflösung.

Es sey AB = a, BD = BE = r, BC = x, so

ist CE = $r - x$. Weil das Auge, welches den strahlenden Punct A im Spiegel siehet, in der Axe AE stehet, so muß der Punct D, wovon der Strahl, der in das Auge fället, reflectiret wird, der Axe AE überaus nahe seyn. Und dannenhero ist DC = CE = $r - x$, die Winckel m, n, p und q sind unendlich kleine, und daher ist DB: AB = $m : n$ und DC: CB = $q : p$, folgends auch DB + AB: AB = $m + n : n$. Da nun $q = m + n$ (§. 101. Geom.) und $p = n$ (§. 13); so ist DB + AB: AB = $q : p$. Derowegen ist

DB + AB : AB = DC : BC

das ist, AE : AB = EC : BC

$a + r \quad a \quad r - x \quad x$

$ax + rx = ar - ax$

$2ax + rx = ar$

$x = ar : (r + 2a)$

$r - x = r - ar : (r + 2a) = (r^2 + ar) : (r + 2a)$.

das ist, EC = AE.BE: (BE + 2AE), oder, wenn ihr AE = $r + a = d$ setzet, = $dr : (2d - r)$.

Der 1. Zusatz.

15. Wenn d grösser ist als r, so ist auch $2d : (2d - r)$ grösser als 1 (§. 78. Arit.) und daher $\frac{1}{2}r . 2d : (2d - r) = dr : (2d - r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$, das ist, wenn der strahlende Punct A vor dem Hohl-Spiegel weiter weg ist als der Semidiameter des Spie-

gels

gels BE austräget, so ist die Weite des Bildes EC grösser als der vierdte Theil des Diameters.

Der 2. Zusatz.

16. Wenn d grösser als r, so ist auch $2d-r$ grösser als d, und daher $d:(2d-r)$ weniger als 1 (§. 78. Arith.), folgends $dr:(2d-r)$ weniger als r, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohl-Spiegel ist geringer als der halbe Diameter.

Der 3. Zusatz

17. Wenn $d = r$, so ist $dr:(2d-r) = rr:(2r-r) = r$, das ist, wenn der strahlende Punct umb den halben Diameter des Spiegels von ihm weg ist, oder in seinem Mittelpuncte stehet, so wird auch sein Bild daselbst gesehen.

Der 4. Zusatz.

18. Wenn $d = \frac{1}{2}r$, so ist $2d = r$ und $rd:(2d-r) = dr:0$, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohl-Spiegel wird unendlich groß, weil der Nenner in Ansehung des Zehlers zu nichts wird, das ist, die Strahlen werden mit der Axe parallel, denn in diesem Falle können sie niemahls mit ihr zusammen kommen.

Der 5. Zusatz.

19. Wenn d kleiner ist als r und $2d$ grösser als r (oder d grösser als $\frac{1}{2}r$); so ist $2d:(2d-r)$ grösser als 1. Denn setzet $2d = r+m$, so ist $2d-r = m$, und daher $2d:(2d-r) = 1+r:m$. Und demnach ist $\frac{1}{2}r.\ 2d:(2d-r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$.

Derowegen wird das Bild auſſer dem Hohl-Spiegel gesehen, wenn die Sache zwischen dem Mittelpuncte und dem Brenn-Puncte lieget, der (§. 14) umb $\frac{1}{2}r$ vom Spiegel weg ist.

Der 6. Zusatz.

20. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, so hat der Renner $2d-r$ das Zeichen —. Denn setzet $2d = r-m$, so ist $2d-r = -m$. Und also hat der gantze Bruch $dr:(2d-r)$ das Zeichen —. Derowegen muß der Ort des Bildes hinter dem Hohl-Spiegel seyn / wenn die Sache zwischen dem Brenn-Puncte und dem Spiegel lieget.

Der 7. Zusatz.

21. Wenn d unendlich groß wird, das ist, wenn die Strahlen mit der Axe parallel einfallen, so ist r in Ansehung $2d$ für nichts zu halten, und demnach ist $dr:(2d-r) = dr:2d = \frac{1}{2}r$.

Der 8. Zusatz.

22. Wenn der Spiegel erhaben ist, so ist $d = a-r$, und daher bekommet ihr an stat $(rr+ar):(2a+r)$ die Linie $EC = (ar-rr):(2a-r) = dr:(2d+r)$. Denn weil $2a-2r = 2d$, so ist $2a-r = 2d+r$. Weil nun hier d allezeit gröſſer ist als r (denn sonst müste die Sache innerhalb dem Spiel stehen), und $d:(2d+r)$ weniger als 1; so ist auch $dr:(2d+r)$ weniger als r. Derowegen wird das Bild zwischen dem Mittelpuncte des Spiegels und seiner Flä-

che

che gesehen, die Sache mag so weit weg seyn als sie wil.

Der 9. Zusatz.

23. Setzet d unendlich groß, so ist r in Ansehung $2d$ unendlich kleine und dannenhero dr: $(2d+r) = dr : 2d = \frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild niemahls weiter hinter einem erhabenen Spiegel gesehen, als den vierdten Theil des Diameters, wenn es gleich unendlich weit wegstehet.

Anmerckung.

24. Es ist nicht nöthig zu erinnern / daß / wenn d und r durch Zahlen gegeben werden / auch die Weite des Bildes von der Spiegel-Fläche in Zahlen heraus komme / und ihr auch daher die Verhältnis der Weite zum Diameter des Spiegels finden könnet.

Der 10. Zusatz.

25. Wenn r unendlich groß wird, so ist der Spiegel platt und als denn ist $2d$ in Ansehung r unendlich kleine. Derowegen wird in diesem Falle $dr : (2d+r) = dr : r = d$, das ist, in einem platten Spiegel ist das Bild so weit hinter ihm, als die Sache vor ihm.

Der 11. Zusatz.

26. Setzet die Weite des strahlenden Punctes in einem Hohl-Spiegel werde nd, so ist die Weite des Bildes $ndr : (2nd-r)$. Derowegen wenn die Weiten des strahlenden Punctes von dem Hohl-Spiegel sich gegen einander verhalten wie d zu nd, so verhalten sich die Weiten des Bildes von demselben wie $dr : (2d-r)$ zu $ndr : (2nd-r)$, das ist, wie $1 : (2d-r)$ zu $n : (2nd-r)$,

$-r$), oder wie $2nd-r$ zu $2nd-nr$. Wenn nun n eine gantze Zahl und d grösser als r ist; so ist $2nd-rn$ kleiner als $2nd-r$. Derowegen wenn der strahlende Punct auſſer dem Mittelpuncte des Spiegels ist, so gehet das Bild näher zu dem Spiegel, wenn der strahlende Punct weiter davon weggehet. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd-rn$ grösser als $2nd-r$. Derowegen wenn der strahlende Punct von dem Hohl-Spiegel weiter weg ist als der Mittelpunct desſelben, so gehet das Bild vom Spiegel weg, wenn der strahlende Punct sich demſelben nähert.

Der 12. Zusatz.

27. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$ und nd gleichfals kleiner als $\frac{1}{2}r$, so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem Spiegel wie $r-2nd$ zu $rn-2nd$. Wenn nun n eine gantze Zahl ist, so ist $rn-2nd$ grösser als $r-2nd$, das ist, wenn der strahlende Punct vom Spiegel weggehet, so gehet auch das Bild davon weg. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $r-2nd$ grösser als $rn-2nd$, das ist, wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommet, so kommet ihm auch das Bild näher.

Der 13 Zusatz.

28. Es werde gleichfals bey einem erhabenen Spiegel die Weite des strahlenden Punctes nd, so wird die Weite des Bildes von dem Spiegel $ndr:(2nd+r)$, das ist, wenn die Weiten des strahlenden Punctes sich verhalten wie

d zu

d zu nd; so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem erhabenen Spiegel wie $dr : (2d+r)$ zu $ndr : (2nd+r)$, das ist, wie $1 : (2d+r)$ zu $n : (2nd+r)$ oder wie $2nd+r$ zu $2nd+nr$. Wenn nun n eine gantze Zahl ist, so ist $2nd+nr$ gröſſer als $2nd+r$. Derowegen wenn der strahlende Punct von dem Spiegel weggehet, so gehet auch das Bild zurücke. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd+nr$ kleiner als $2nd+r$. Derowegen wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommet, so kommet ihm auch das Bild näher.

Die 6. Aufgabe.

29. Das Gesetze der Natur zu finden/nach welchem die Strahlen des Lichtes gebrochen werden/ wenn sie aus einem durchsichtigen Cörper in einen anderen dichteren fahren.

Auflösung.

Es werde der Strahl AB in B gebrochen und fahre in G. Setzet die Geschwindigkeit, mit welcher sich der ungebrochene Strahl AB beweget, verhalte sich zu der Geschwindigkeit des gebrochenen BG wie n zu m. Derowegen ist die Zeit, in welcher die Linie AB durchlauffen wird, zu der Zeit, in welcher das Licht durch die Linie BG kommet wie n BA zu m BG (§. 7). Lasset nun von A und G die Perpendicular-Linien AD und GC fallen und es sey $AD = a$, $CG = b$, $CD = c$, $CB = x$, so ist $BD = c-x$, folgends $BG = \sqrt{(xx+bb)}$, $AB = \sqrt{(aa+cc-2cx+xx)}$

Tab. XI. Fig. 94.

und n BA + m GB = $nV(aa+cc-2cx+xx)+mV(xx+bb)$. Weil nun das Licht aus A in G in der geschwindesten Zeit kommen muß, indem die Natur immer den kürtzesten Weg gehet; so ist $nV(aa+cc-2cx+xx)+mV(xx+bb)$ die kürtzeste Zeit, in welcher das Licht durch die Refraction aus A in G gelangen kan. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, in welcher

$$nV(aa+cc-2cx+xx)+mV(xx+bb)=y$$

so ist (§ 20. P. II)

$$n(xdx-cdx):V(aa+cc-2cx+x^2)+mxdx:V(x^2+b^2)=dy=0$$

$$mx:V(x^2+b^2)=n(c-x):V(aa+cc-2cx+x^2)$$

das ist mCB : BG = nDB : AB

$$m\text{CB}.\ \text{AB}=n\text{BD}.\ \text{BG}$$

Setzet BG = AB, so ist

$$m\text{CB}=n\text{BD}$$

folgends $m:n$ = BD : BC

Wenn ihr nun BG und AB für den Sinum Totum annehmet, so ist BD der Sinus des Winckels BAD oder ABK, hingegen BC der Sinus des Winckels BGC oder GBF (§. 97. Geom. §. 3. Trigon.). Und demnach hat der Sinus des Inclinations-Winckels ABK zu dem Sinu des gebrochenen Winckels FBG beständig einerley Verhältnis.

Die 7. Aufgabe.

Tab. XI. Fig. 95.

30. Den Punct f zu finden / wo die Strahlen

len des Lichtes nach geschehener Refraction in dem Glase KL mit der Axe AF vereiniget werden.

Auflösung.

Setzet der Strahl AD sey dem Strahle A B unendlich nahe, so ist der Winckel A unendlich kleine und die Linie DI, so mit der Axe einen rechten Winckel in I machet, stehet auch auf A D perpendicular. Eben so machet GH so wohl in G als H einen rechten Winckel. Es sey nun $AD = AB = AI = y$, $Bc = a$, $EC = b$, $BE = f$, $DF = IF = BF = x$, $HF = EF = GF = v$, $Hf = Ef = Gf = z$, $cP = r$, $CM = t$, die Verhältnis der Refraction aus der Luft ins Glaß 3:2, so ist $Ac = y+a$, $FC = v+b$, $Fc = x-a$. Weil nun $3:2 = cP:cQ$: (§. 29), so ist $cQ = 2r:3$. Eben so weil $2:3 = CM:CN$ (§. 29), so ist $CN = 3t:2$. Weil ID mit cP parallel, so ist (§. 184. Geom.)

$Ac : cP$	$=$	$AI : ID$	
$y+a$	r	y	$ry:(y+a)$

Eben so, weil wegen der rechten Winckel bey D und Q die Linien ID und cQ parallel sind, ist (§. 184. Geom.).

$FI : ID$	$=$	$Fc : cQ$	
x	$ry:(y+a)$	$x-a$	$\frac{2}{3}r$
$\frac{2}{3}rx = (rxy-ary):(y+a)$			

$$2rxy + 2arx = 3rxy - 3ary$$

$$3ary = rxy - 2arx$$

$$3ay : (y - 2a) = x$$

Wiederumb weil wegen der rechten Winckel bey M und H die Linien CM und GH parallel sind, so ist (§.184.Geom.).

FC : CM = FG : GH

$b+v \quad t \quad v \quad tv : (b+v)$

Und endlich weil wegen der rechten Winckel bey N und H die Linien CN und GH parallel sind, so ist (§.184. Geom.).

fC : CN = fG : GH

$b+z \quad \frac{3}{2}t \quad z \quad tv : (b+v$

$$\frac{3}{2}tz = (btv + tvz) : (b+v)$$

$$3btz + 3tvz = 2btv + 2tvz$$

$$3bz = 2bv - vz$$

$$3bz : (2b-z) = v = x - f$$

$$f + 3bz : (2b-z) = x = 3ay : (y-2a)$$

$$2bfy - fzy + 2afz - 4abf + 3bz - 6abz = 6aby - 3azy$$

$$3azy + 3bzy + 2afz - fzy - 6abz = 6aby + 4abf - (2bfy$$

z =

$$z = \frac{6aby + 4abf - 2bfy}{3ay + 3by + 2af - fy - 6ab} = Ef$$

Wenn ihr die Dicke des Glases nicht regardiret, so verlieren sich alle Glieder, die durch f multipliciret sind, und ihr bekommet

$Ef = z = 6aby : (3ay + bcy - 6ab) = 2aby : (ay + by - 2ab)$.

Anmerckung.

31. Unerachtet die gefundene Regel haupsächlich dienet den Ort des Bildes zu finden, wenn das Glaß auf beyden Seiten erhaben ist und zwar die Radii der erhabenen Flächen nicht von einerley Grösse sind; so könnet ihr doch daraus gar leichte auch Regeln für alle übrige Fälle herleiten, wie aus folgenden Zusätzen erhellet.

Der 1. Zusatz.

32. Wenn das Glaß auf beyden Seiten gleich erhaben ist, so ist $cB = CE$, das ist, $a = b$ und daher $z = 2a^2y : (2ay - 2a^2) = ay : (y - a)$.

Der 2. Zusatz.

33. Wenn cB oder a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL, die gegen den strahlenden Punct A gekehret ist, platt, und die Glieder, die durch a nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich kleine oder nichts. Daher ist $z = 2aby : (ay - 2ab) = 2by : (y - 2b)$.

Der 3. Zusatz.

34. Hingegen wenn b unendlich groß wird, so ist das Glaß auf der hinteren Seite KEL platt und die Glieder, darinnen b nicht vorhanden, werden in Ansehung der anderen unend-

lich

lich kleine. Solchergestalt ist $z = 2aby : (by - 2ab) = 2ay : (y - 2a)$.

Der 4. Zusatz.

35. Also ist es ein Thun, ob ihr die erhabene oder platte Fläche eines Glases, so auf einer Seite erhaben, auf der anderen platt ist, gegen den strahlenden Punct kehret.

Der 5. Zusatz.

36. Wenn so wol a als b unendlich groß werden, so wird das Glaß auf beyden Seiten platt und $ay + by$ werden in Ansehung $2ab$ unendlich kleine. Daher ist $z = 2aby : -2ab = -y$. Also kommen die Strahlen nirgends zusammen, als in dem Puncte, wo sie ausfliessen.

Der 6. Zusatz.

37. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen mit der Axe parallel ein, und daher ist $2ab$ in Ansehung der übrigen Glieder unendlich kleine, folgends $z = 2aby : (ay + by) = 2ab : (a + b)$ für ein Glaß, welches auf beyden Seiten auf verschiedene Art erhaben ist.

Der 7. Zusatz.

38. Wenn das Glaß beyderseits auf gleiche Art erhaben ist, so ist $z = 2aa : 2a = a$.

Der 8. Zusatz.

39. Wenn a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL gegen den strahlenden Punct zu platt, und b in Ansehung a unendlich kleine. Derowegen ist $z = 2ab : a = 2b$. Hingegen

wenn

wenn b unendlich groß wird, so ist die vom strahlenden Puncte A weggekehrte Seite KE L platt / und a in Ansehung b unendlich kleine. Derowegen ist $z = 2ab : b = 2a$.

Der 9. Zusatz.

40. Wenn ihr für $+b$ in der Regel $-b$ setzet, so wird das Glaß auf der Seiten KBL gegen den strahlenden Punct A zu hohl, und $z = -aby : (ay - by + 2ab)$.

Der 10. Zusatz

41. Setzet $-a$ für $+a$, so wird das Glaß auf der vom strahlenden Puncte weggekehrten Seite hohl und $z = -aby : (by + 2ab - ay)$.

Der 11. Zusatz.

42. Wenn ihr für a und b zugleich $-a$ und $-b$ setzet, so wird das Glaß auf beyden Seiten hohl, und $z = 2aby : (-ay - by - 2ab)$.

Der 12. Zusatz.

43. Wenn a unendlich groß wird und ihr $-b$ für b setzet, so ist das Glaß auf der Seite gegen den strahlenden Punct platt, auf der anderen aber erhaben, und die Grössen, so durch a nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich kleine. Daher ist $z = -2by : (y + 2b)$.

Der 13. Zusatz.

44. Wenn b unendlich groß wird und ihr $-a$ für a setzet, so ist das Glaß auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu hohl, auf der anderen

erha-

ben, und die Grössen, so durch b nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich kleine. Daher ist $z = -2ay:(y+2a)$.

Der 14. Zusatz.

45. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen parallel ein und daher wird (§. 40) $z = -2aby:(ay-by) = -2ab:(a-b)$, (§. 41) $z = -2aby:(-ay+by) = -2ab:(b-a) =$ (wenn $a = b$) $-2a^2$, (§. 42) $z = 2aby:(-ay-by) = 2ab:(-a-b) =$ (wenn $a = b$) $-2a^2$, (§. 43) $z = -2by:y = -2b$, (§. 44) $z = -2ay:y = -2a$.

Der 15. Zusatz.

46. Weil in den Hohl-Gläsern die Weite des Punctes, wo die gebrochene Strahlen mit der Axe vereiniget werden, das Zeichen — hat, so ist klar, daß derselbe auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu gesucht werden muß und dannenhero die Strahlen in dergleichen Gläsern von der Axe weggebrochen werden. Ob aber solches viel oder wenig geschehe, kan aus den gefundenen Regeln geurtheilet werden.

Anmerckung.

47. Aus diesen Exempeln könnet ihr sehen, wie die Algebra mit grossem Vortheile in anderen Wissenschafften angebracht wird, und werde ich bey anderer Gelegenheit noch ein mehreres zeigen.

ENDE der Algebra.

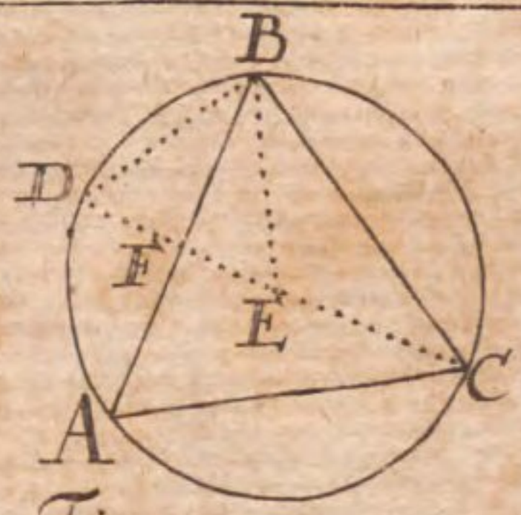


Fig: 1.

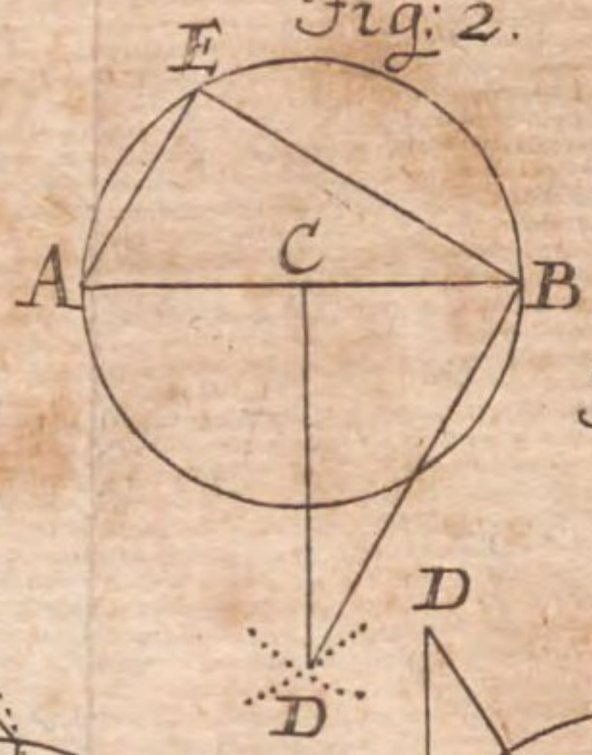


Fig: 2.

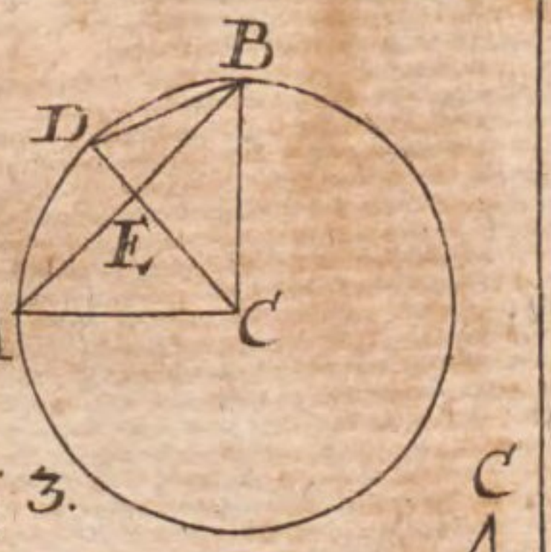


Fig: 3.

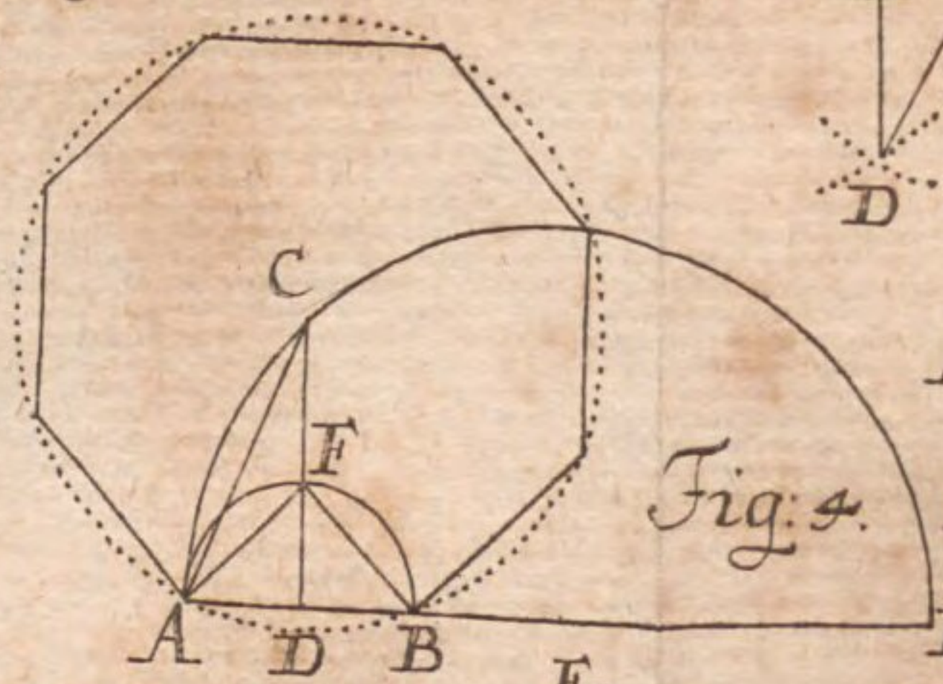


Fig: 4.

Fig: 5.

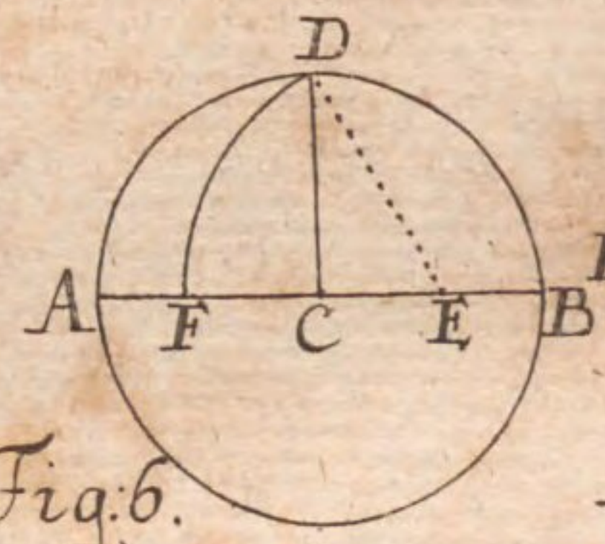


Fig: 6.

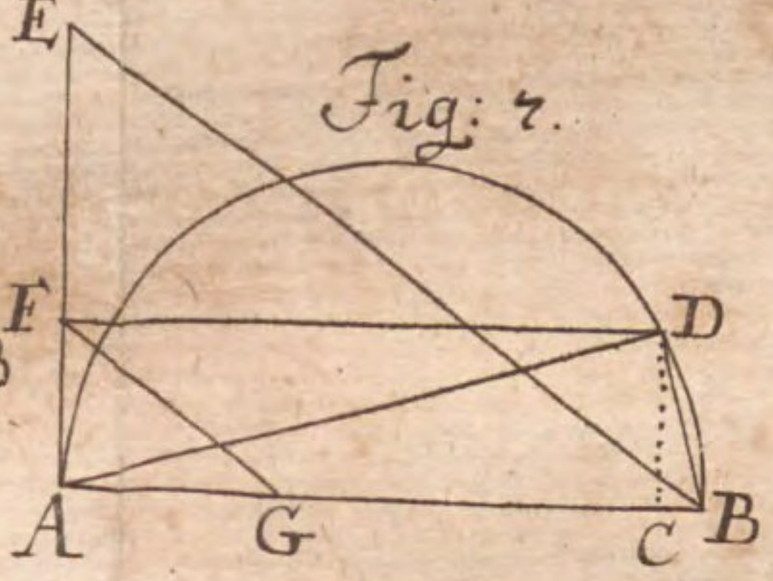


Fig: 7.

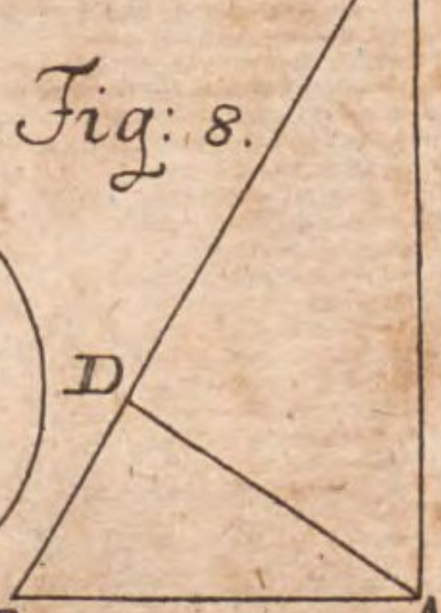


Fig: 8.

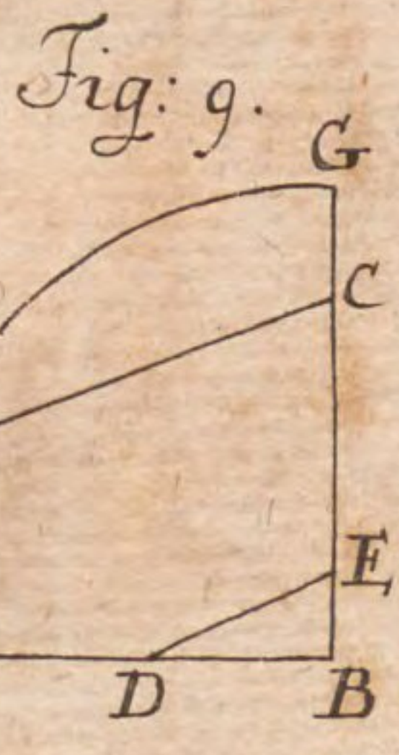


Fig: 9.

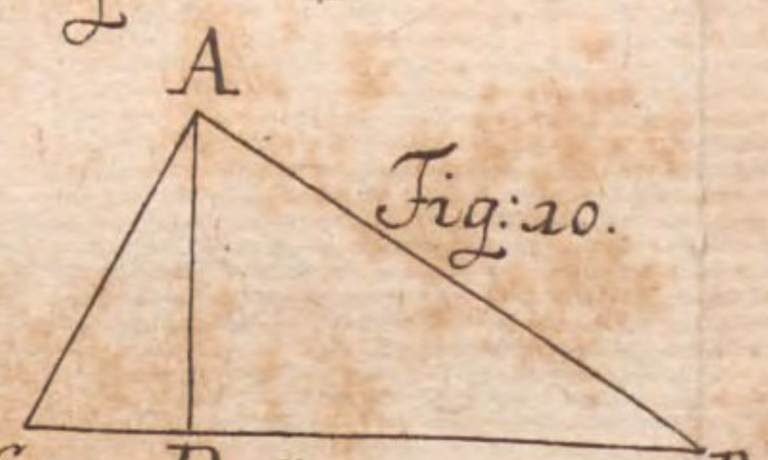


Fig: 10.

Fig: 12.

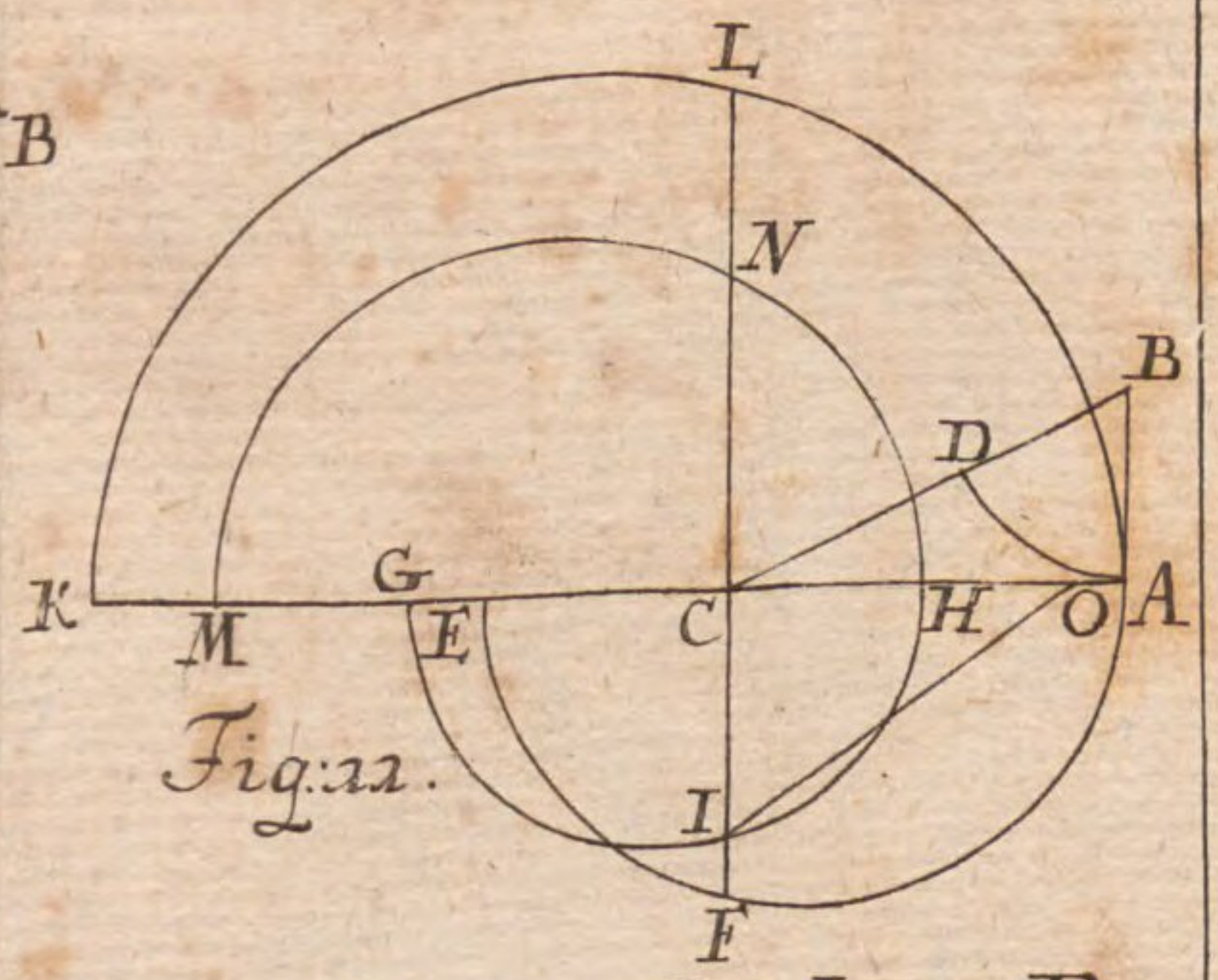


Fig: 11.

Figur: Algebr: Tab: I. Lit: P. 5.

Fig: 13.

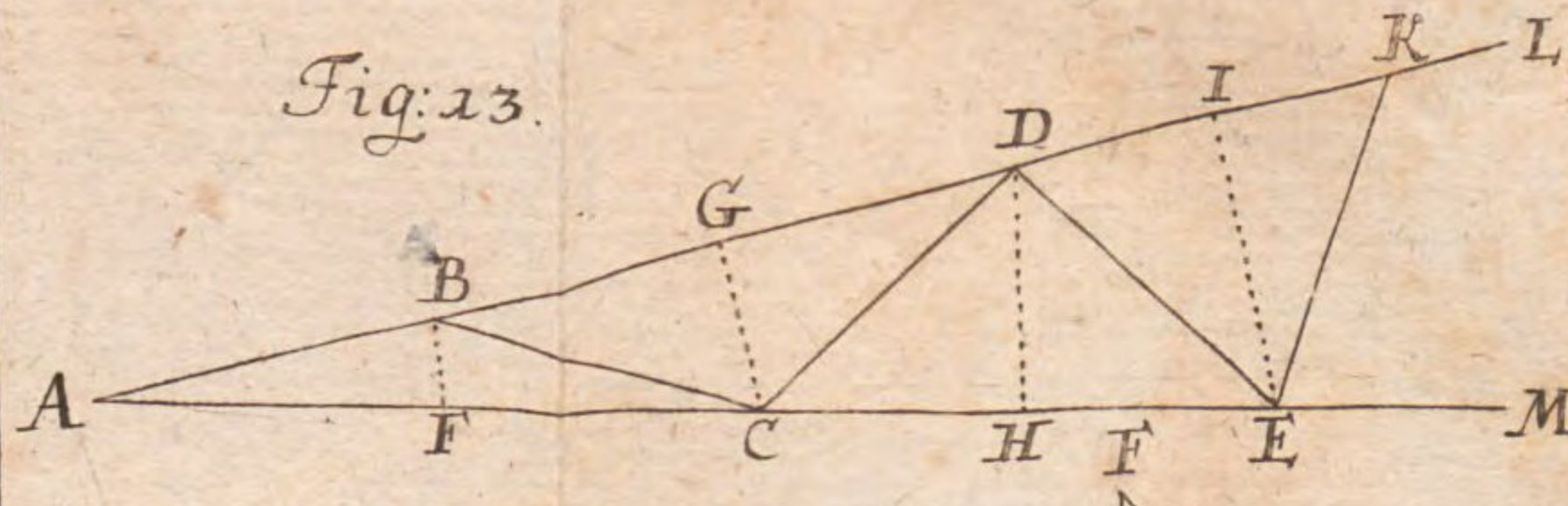


Fig: 14.

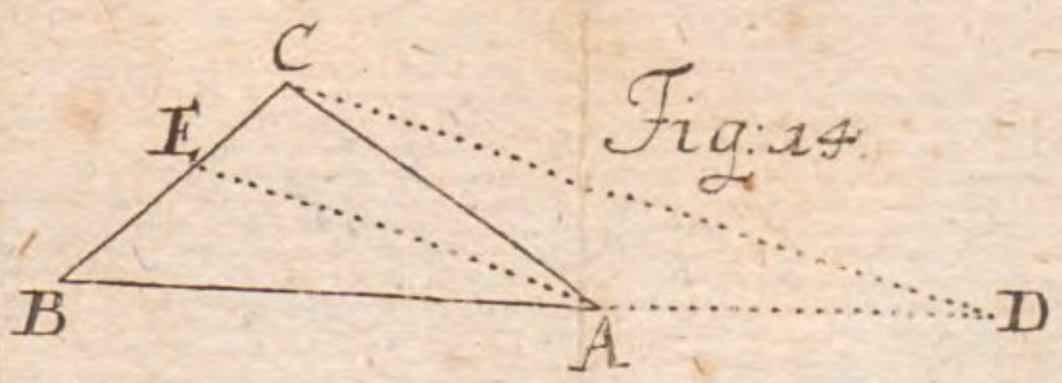


Fig: 15.

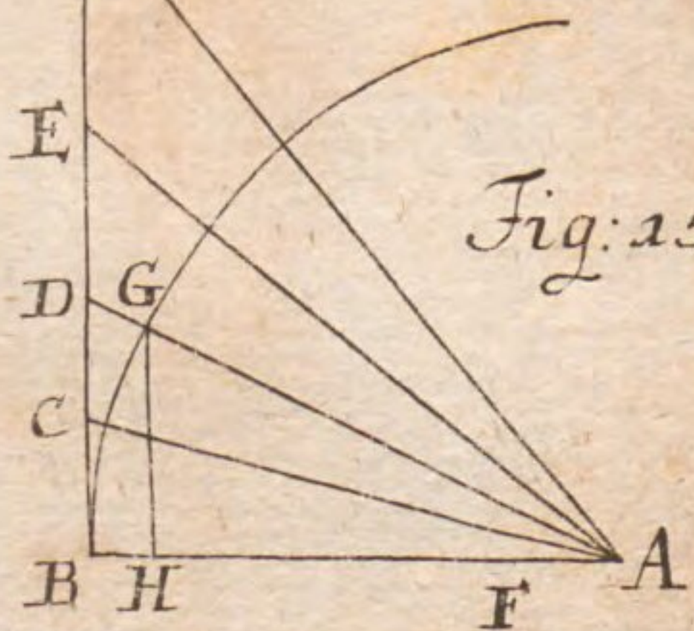


Fig: 16.

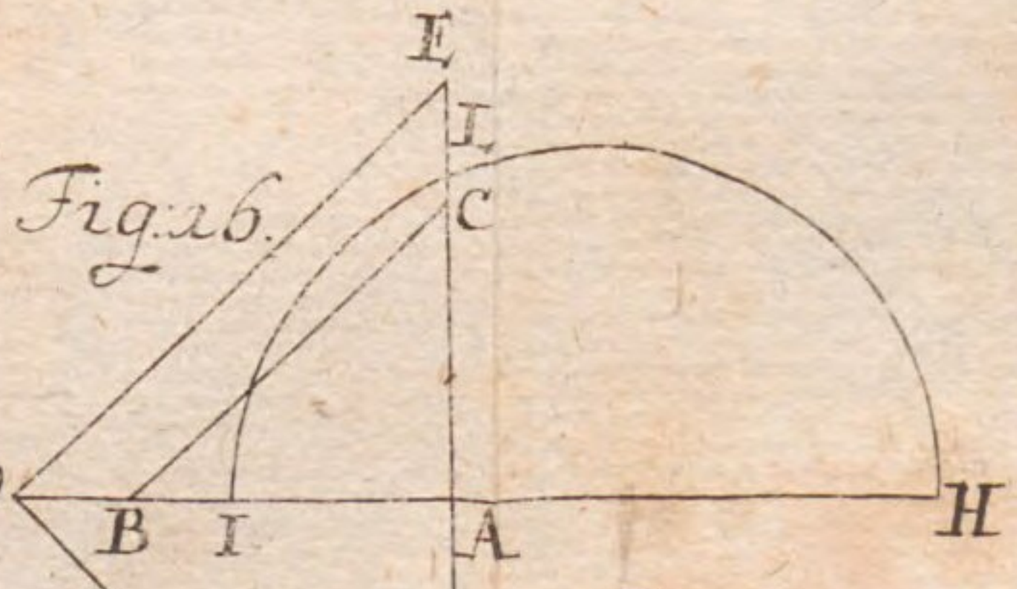


Fig: 17.

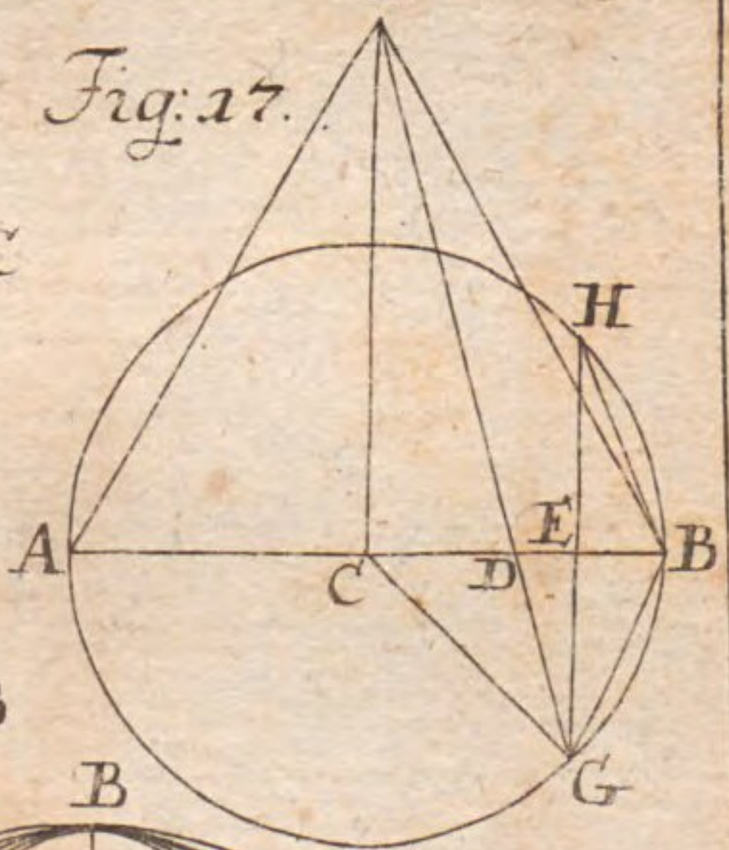


Fig: 18.

Fig: 19.

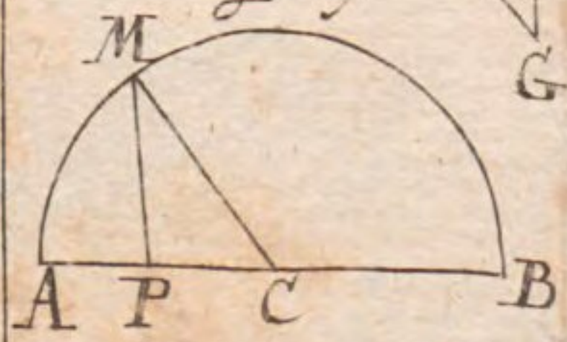


Fig: 20.

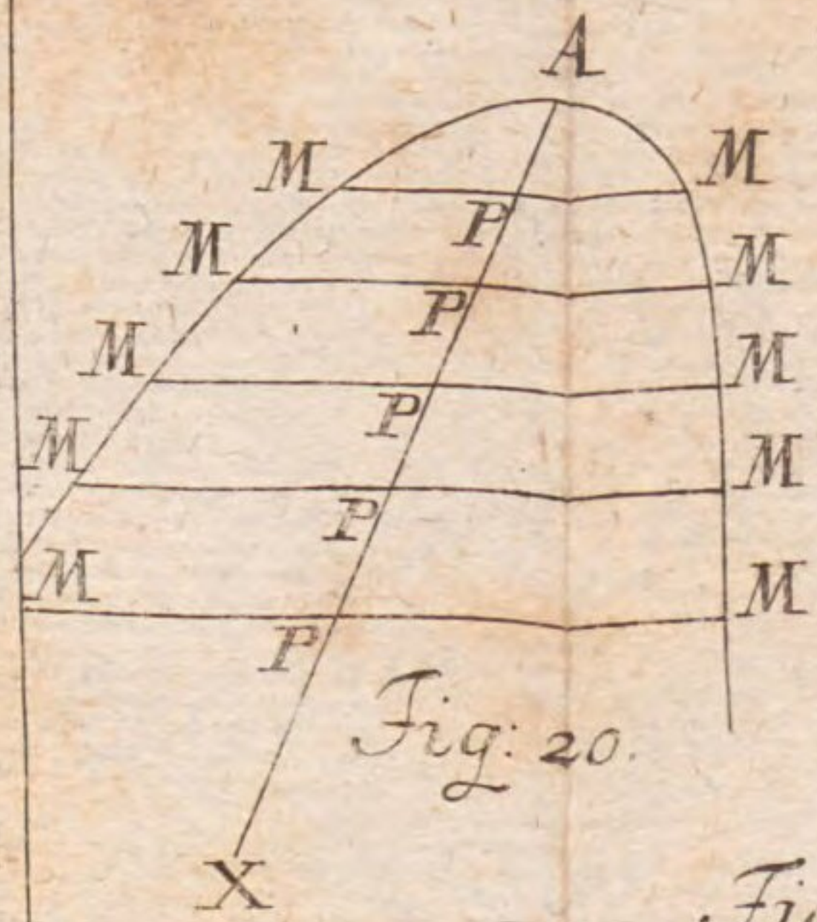


Fig: 21.

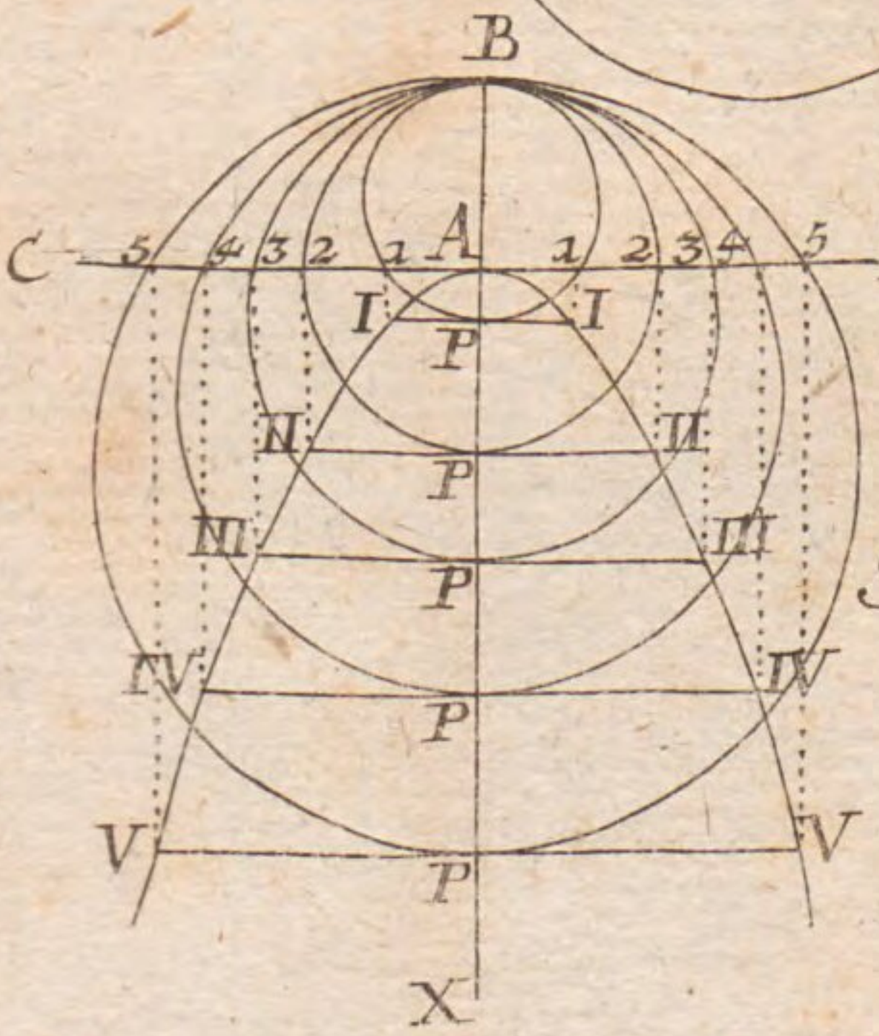


Fig: Algebr: Tab: II. Lit: Q. 5.

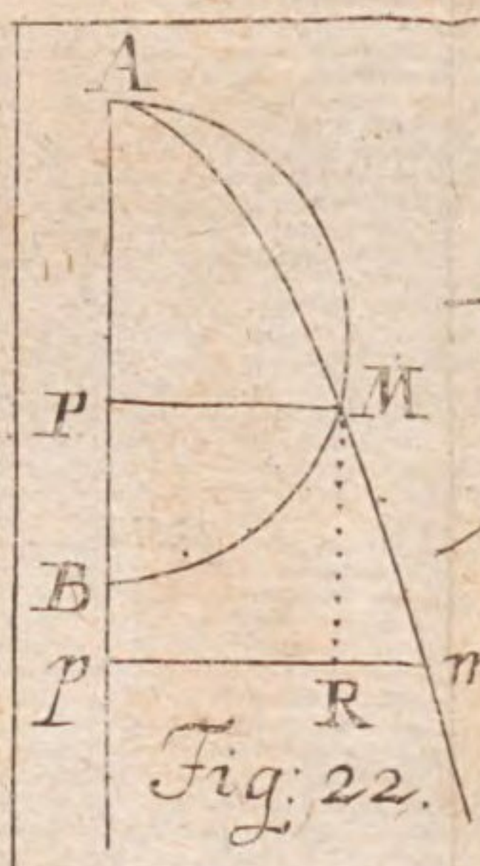


Fig: 22.

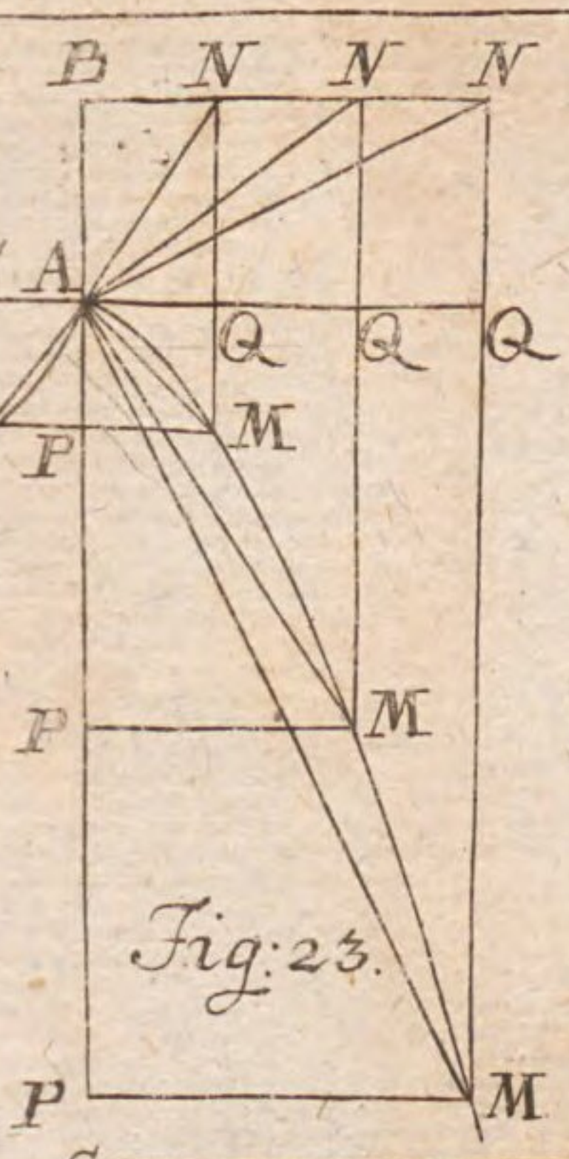


Fig: 23.

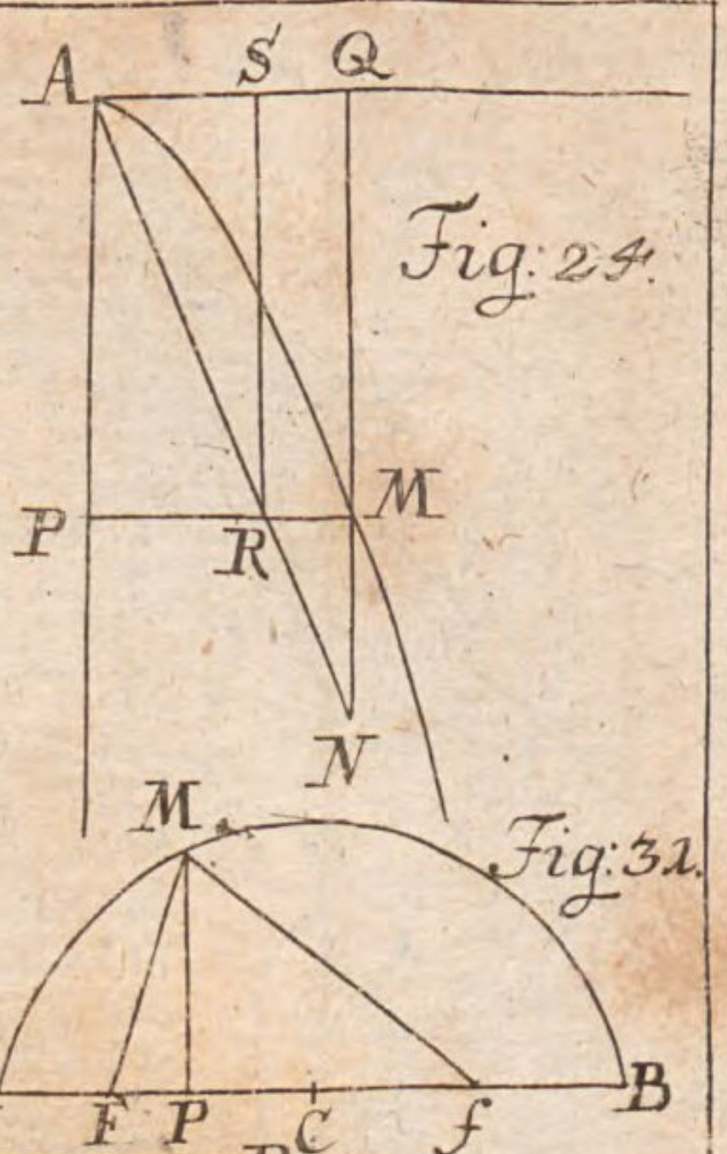


Fig: 24.

Fig: 31.

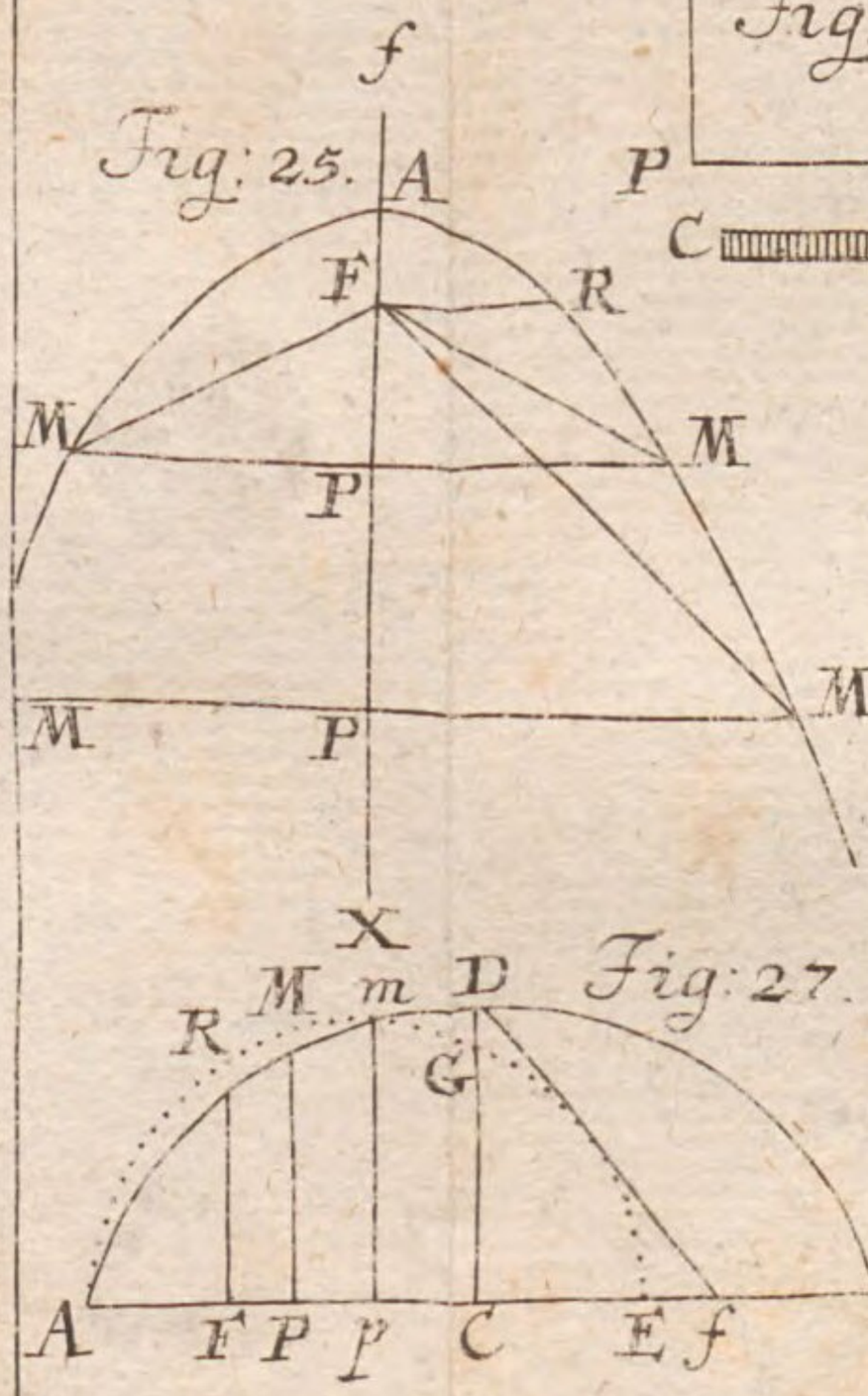


Fig: 25.

Fig: 27.

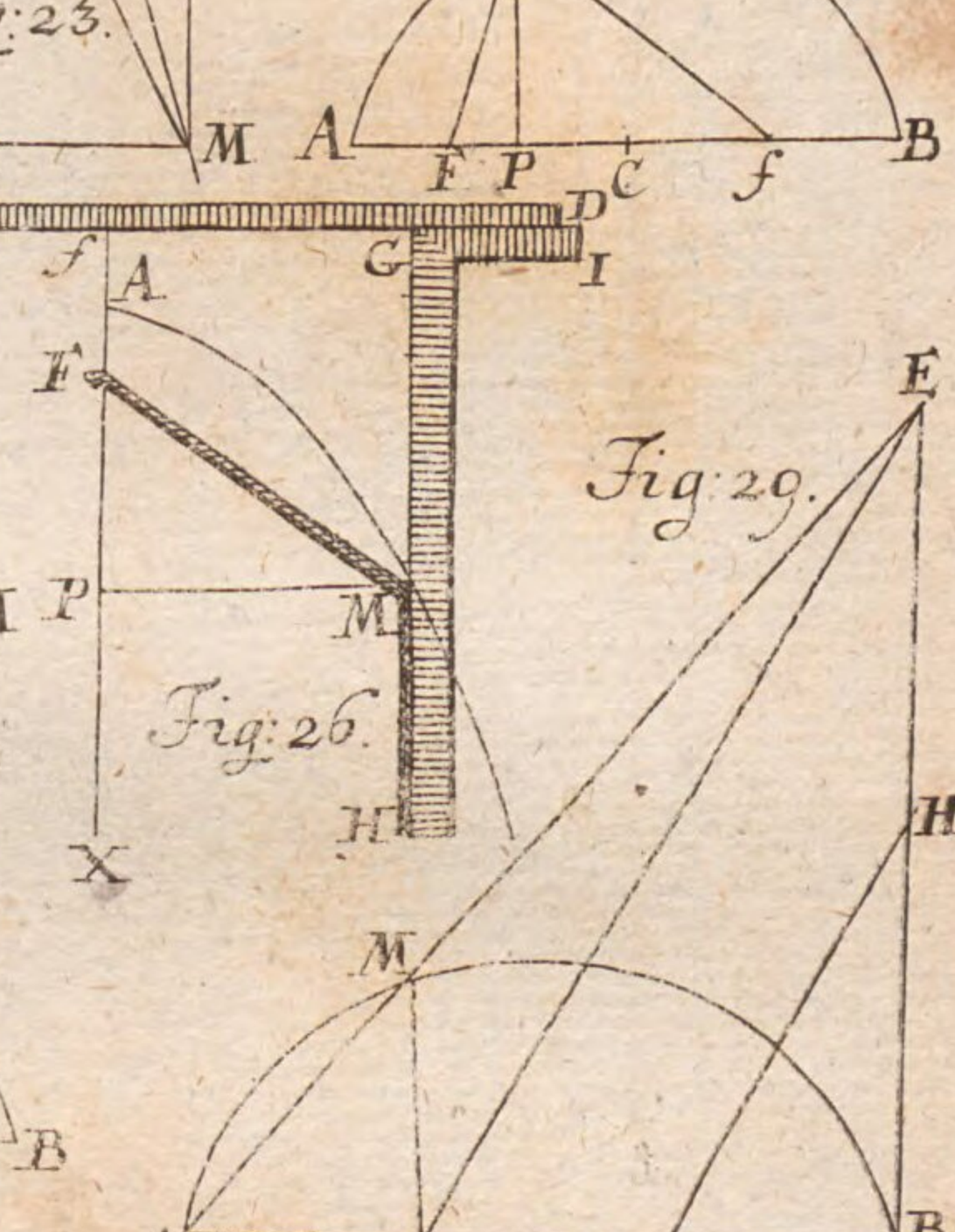


Fig: 26.

Fig: 29.

Fig: 30.

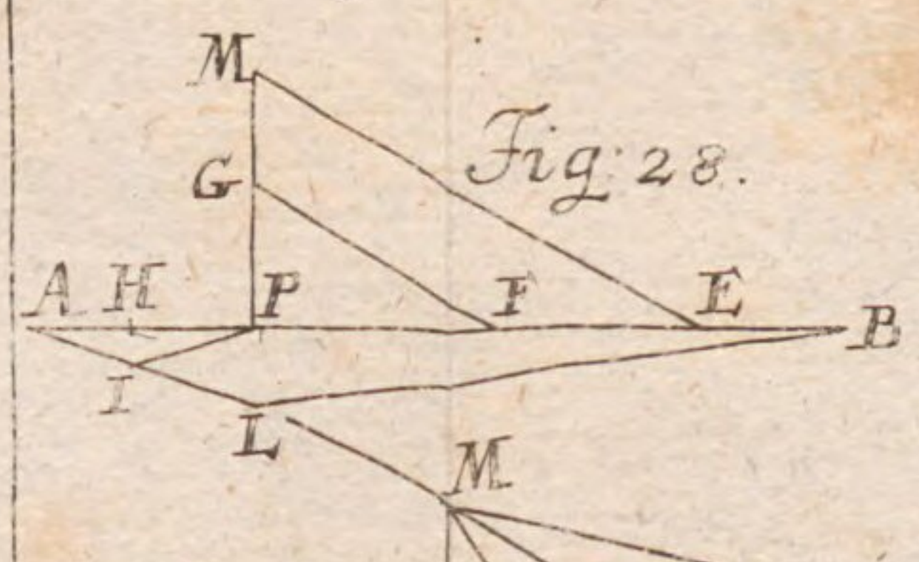


Fig: 28.

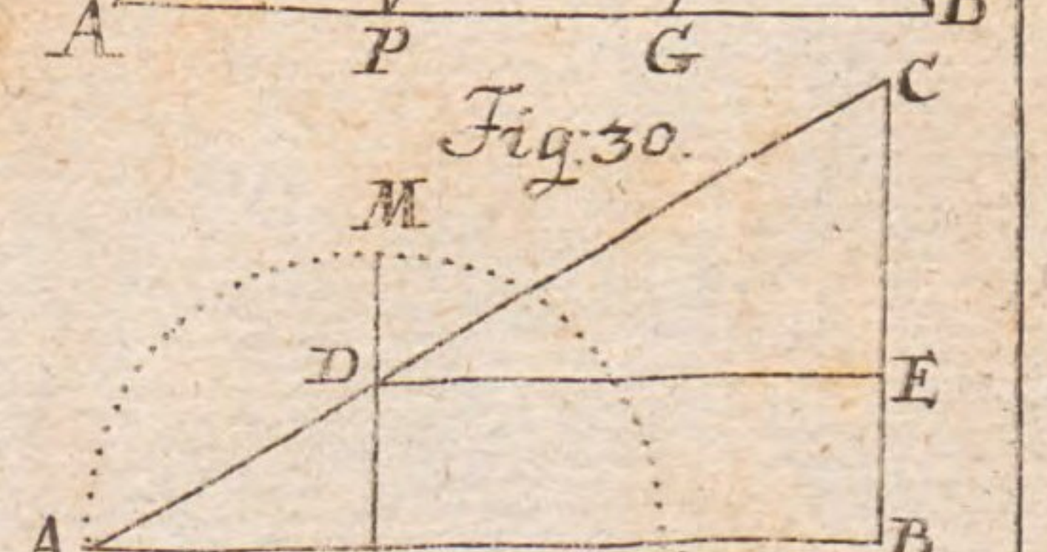


Fig: 33.

Lit: R. 5.

Fig: Algebr: Tab: III.

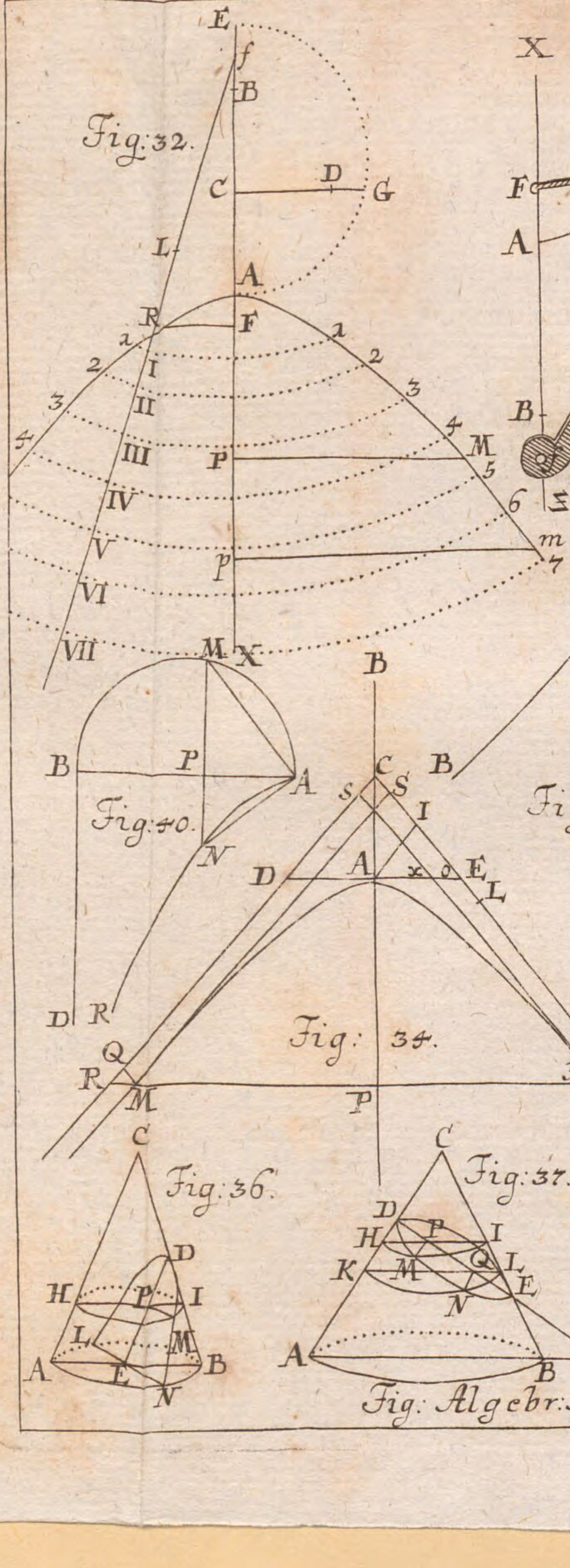


Fig: 32.

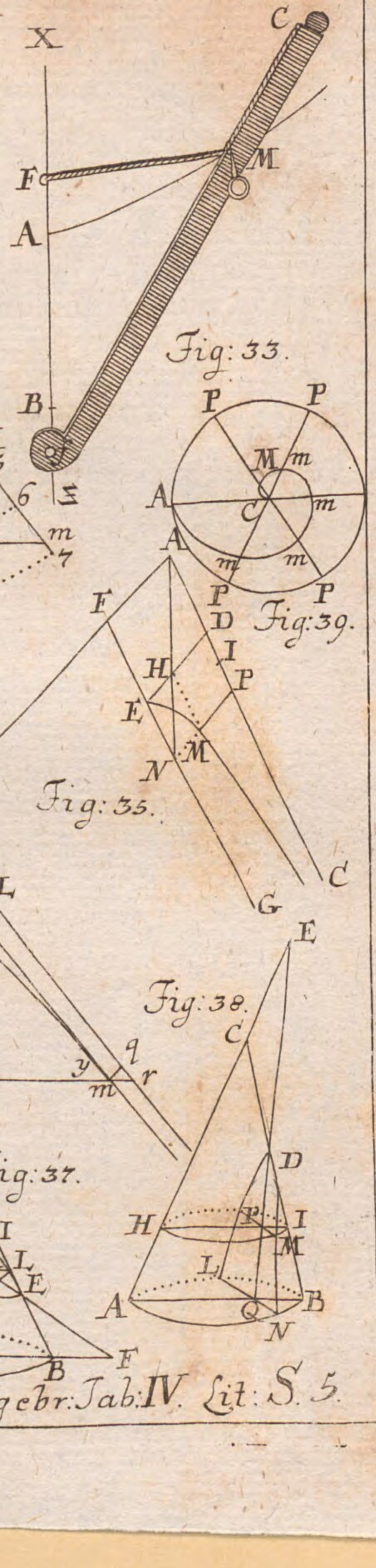


Fig: 33.

Fig: 39.

Fig: 40.

Fig: 34.

Fig: 35.

Fig: 38.

Fig: 36.

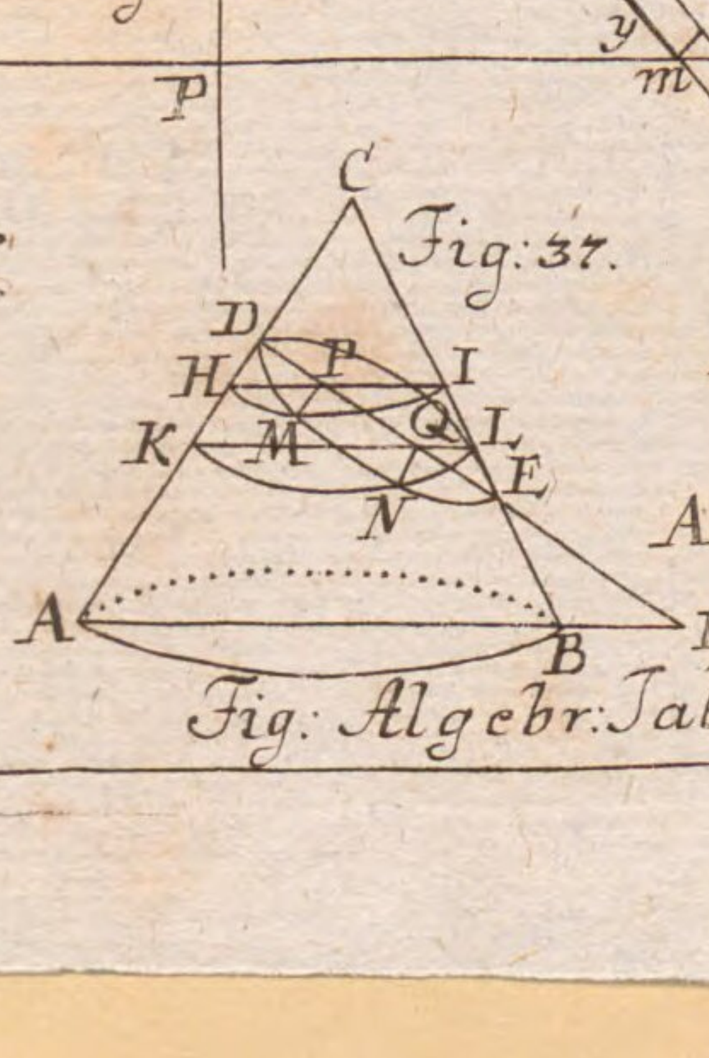


Fig: 37.

Fig: Algebr: Tab: IV. Lit: S. 5.

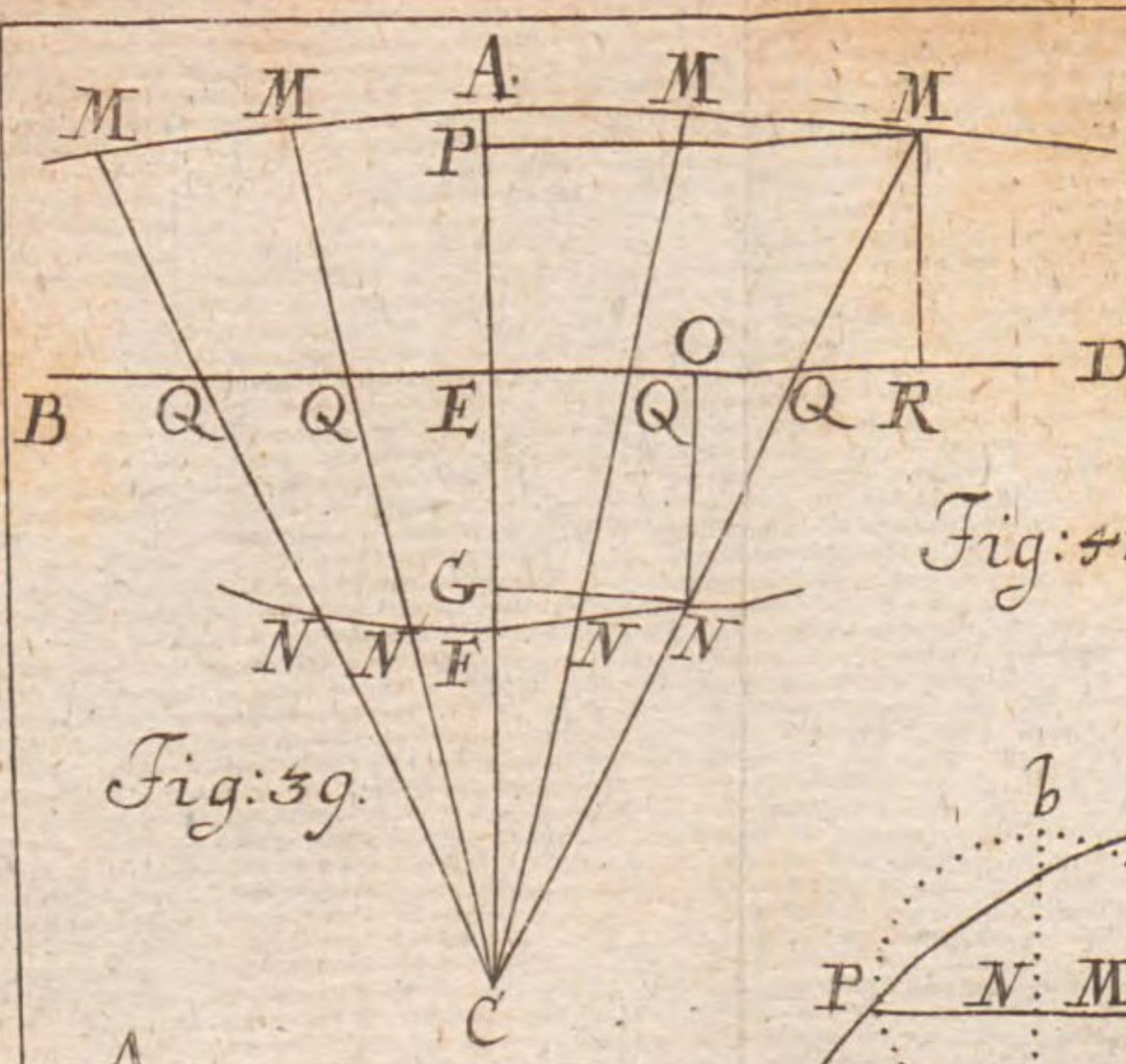


Fig: 39.

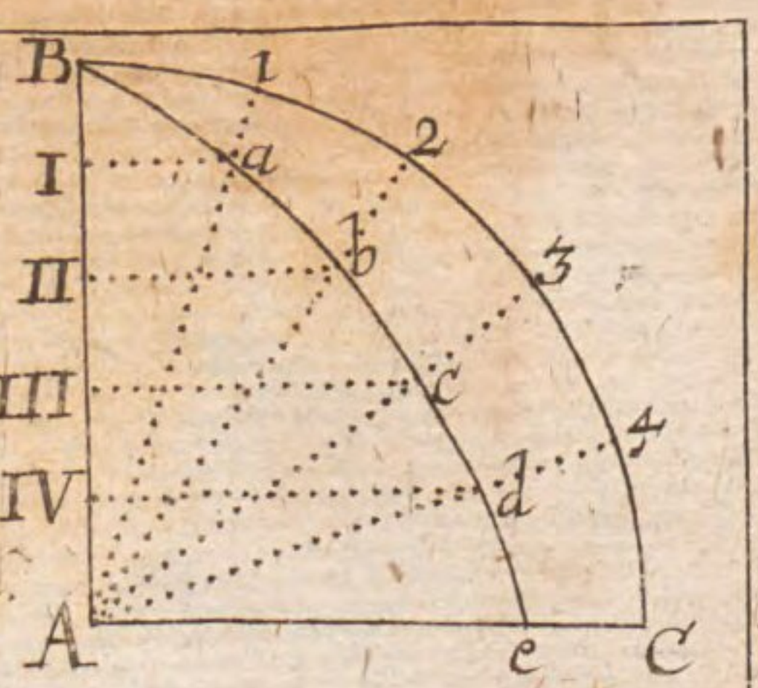


Fig: 41.

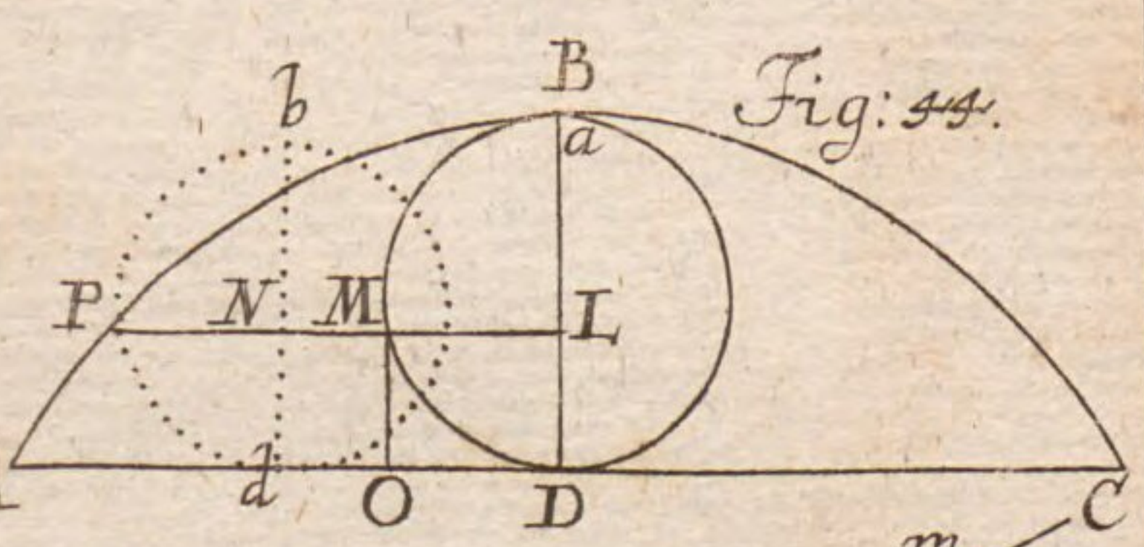


Fig: 44.

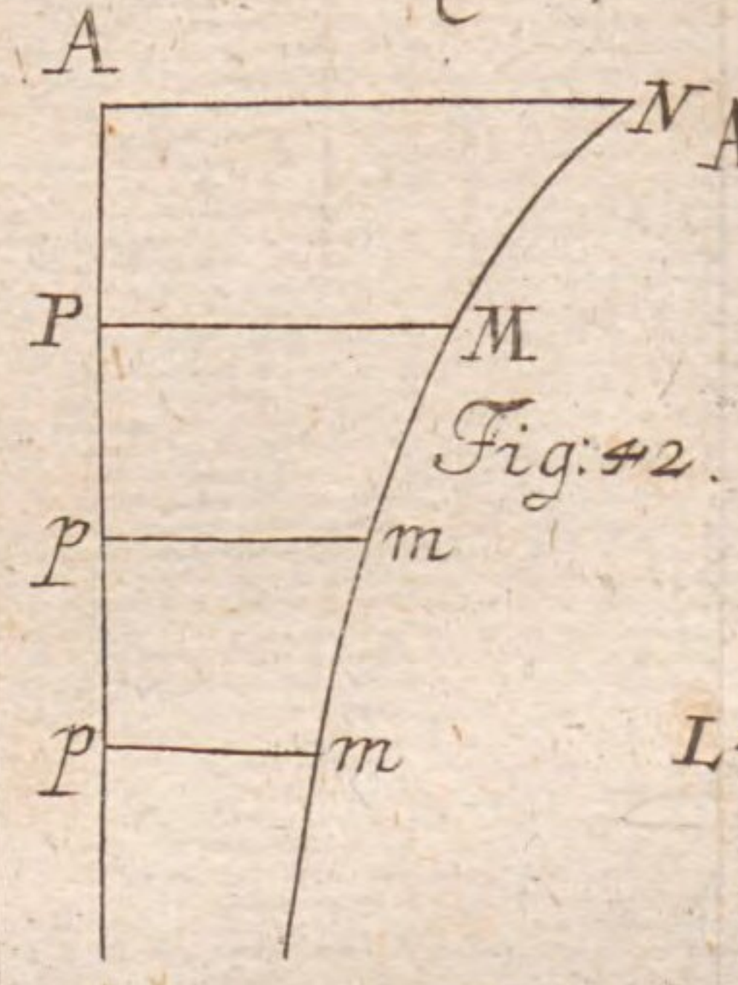


Fig: 42.

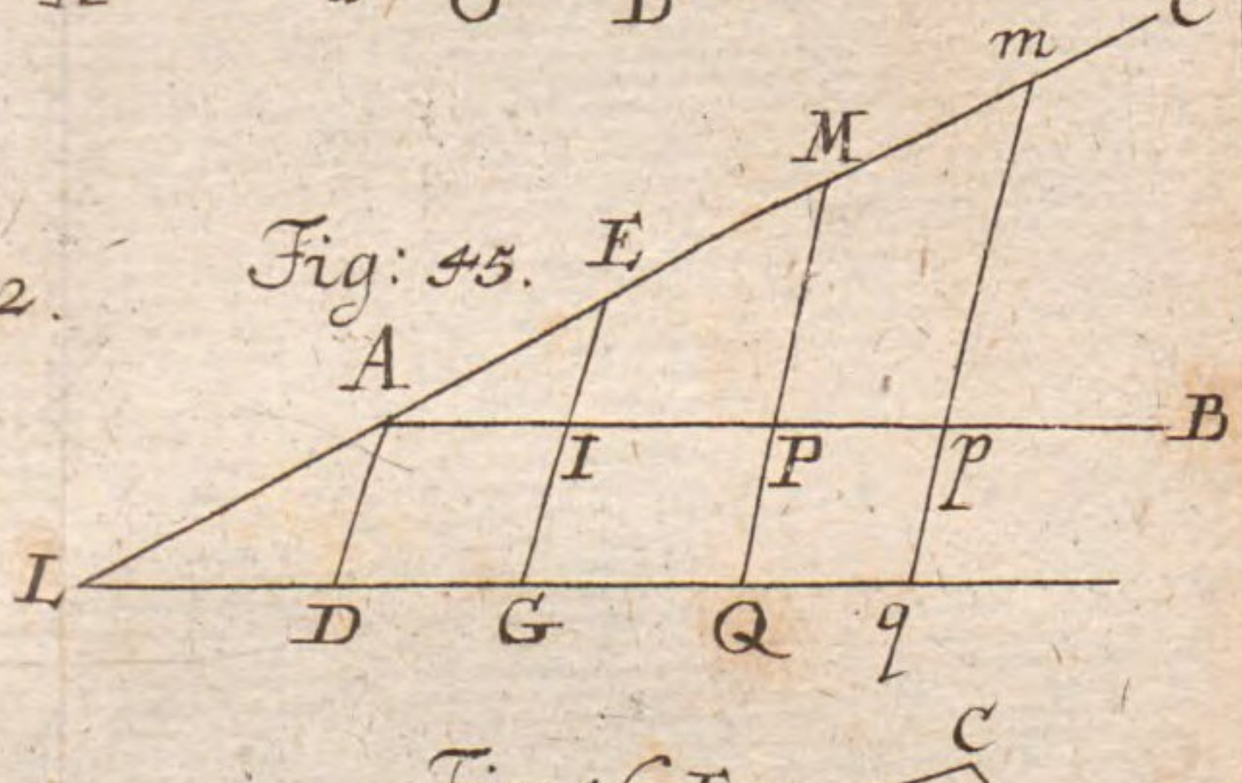


Fig: 45.

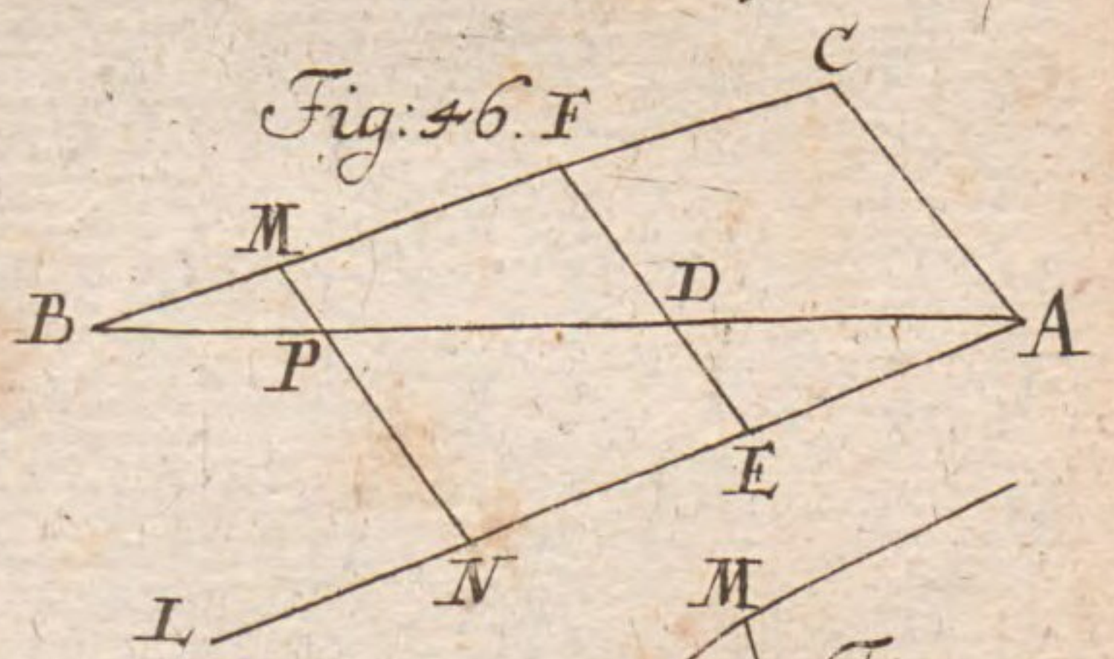


Fig: 46. F

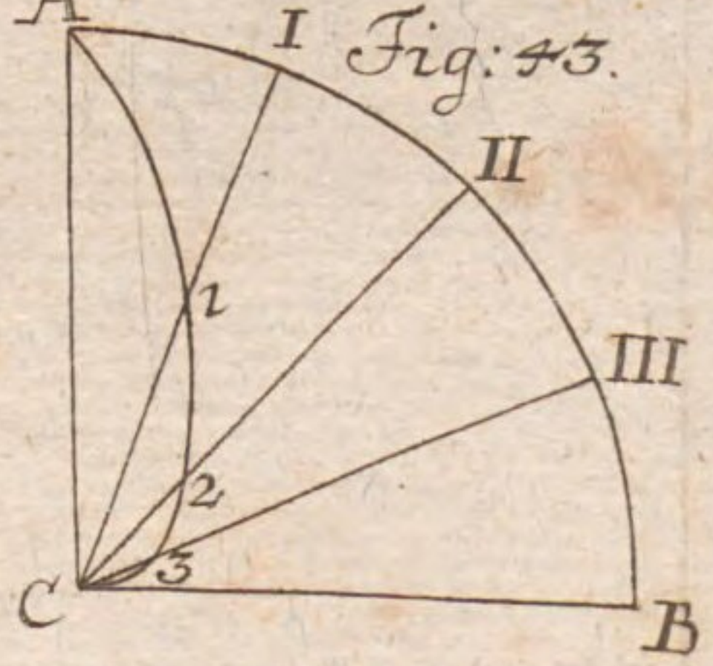


Fig: 43.

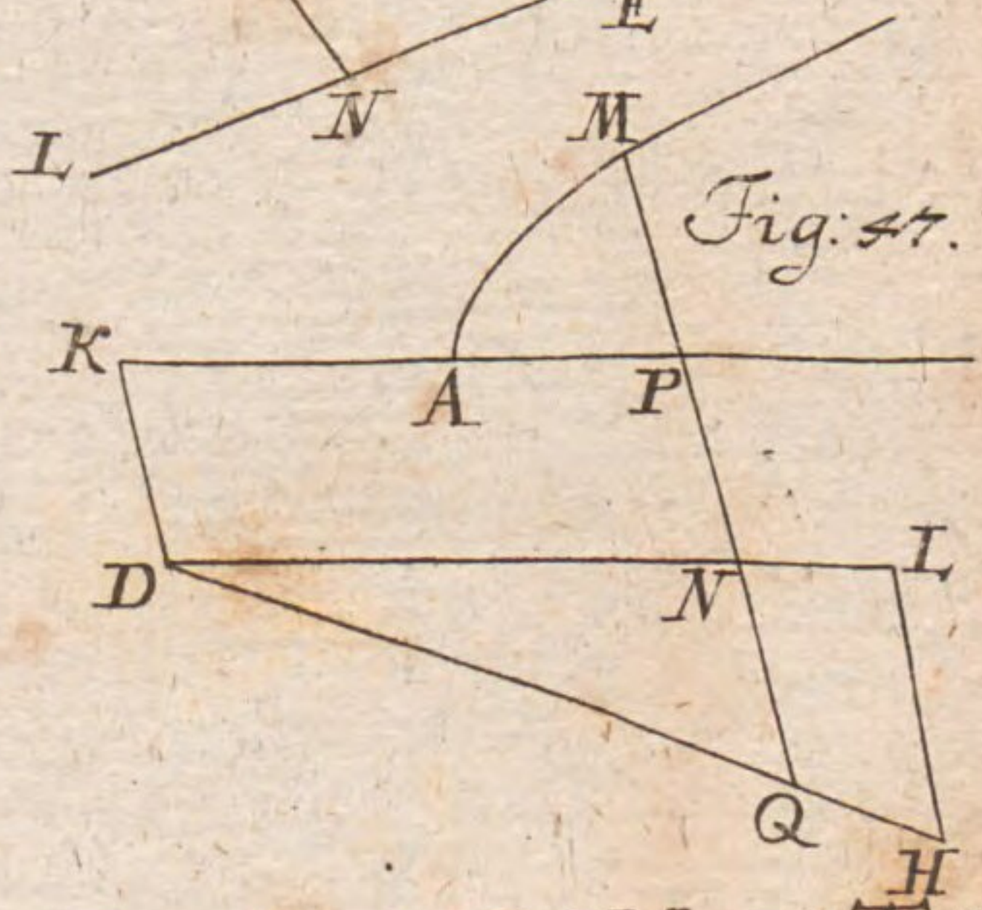


Fig: 47.

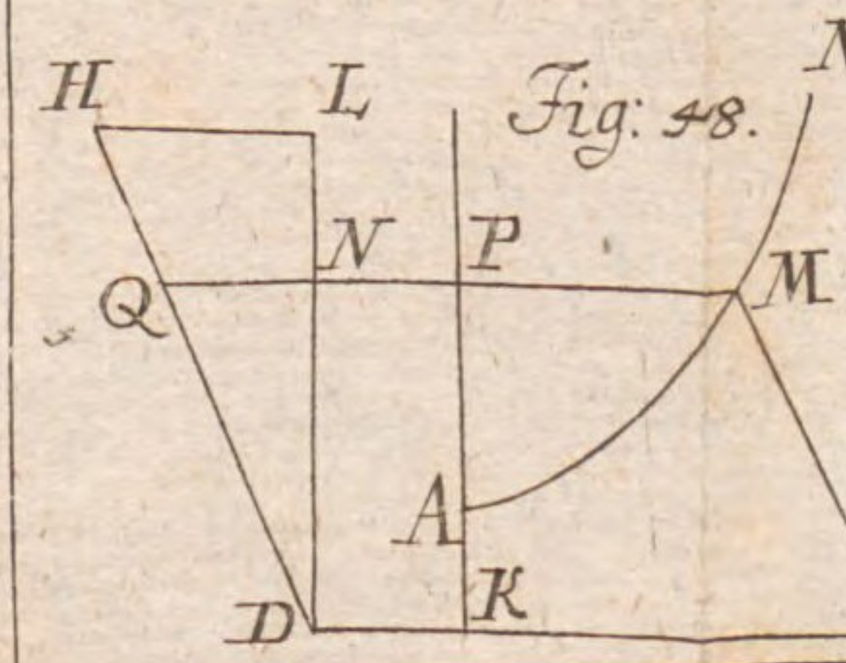


Fig: 48.

Fig: Algebr: Tab: V. Lit: T. 5.

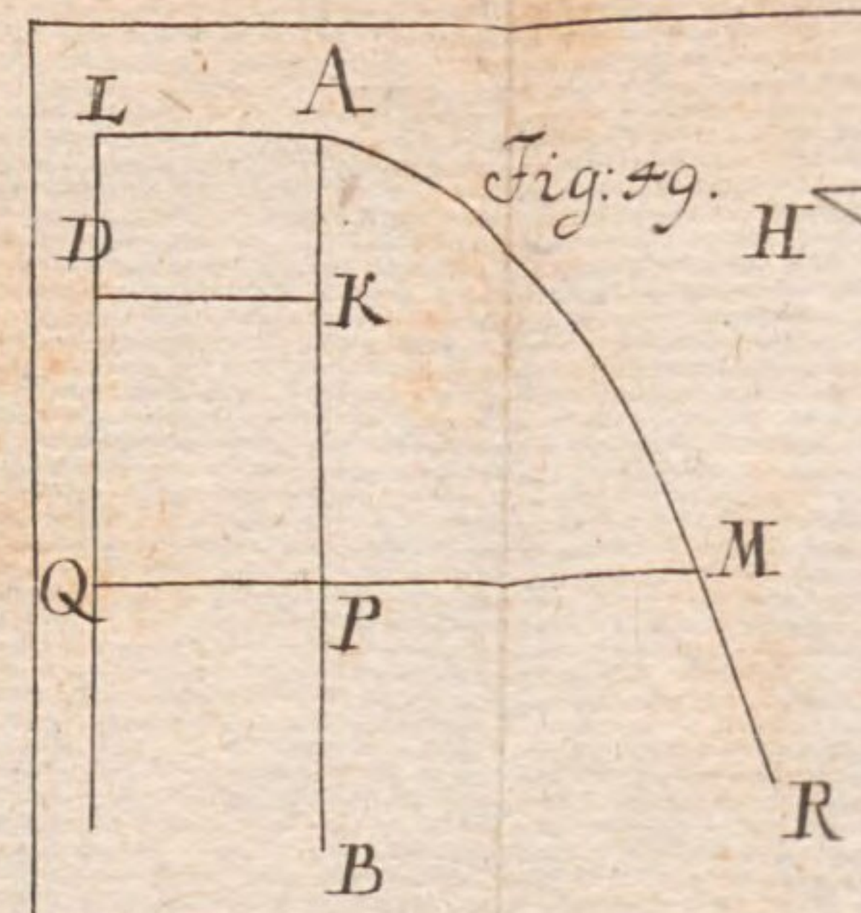


Fig: 49.

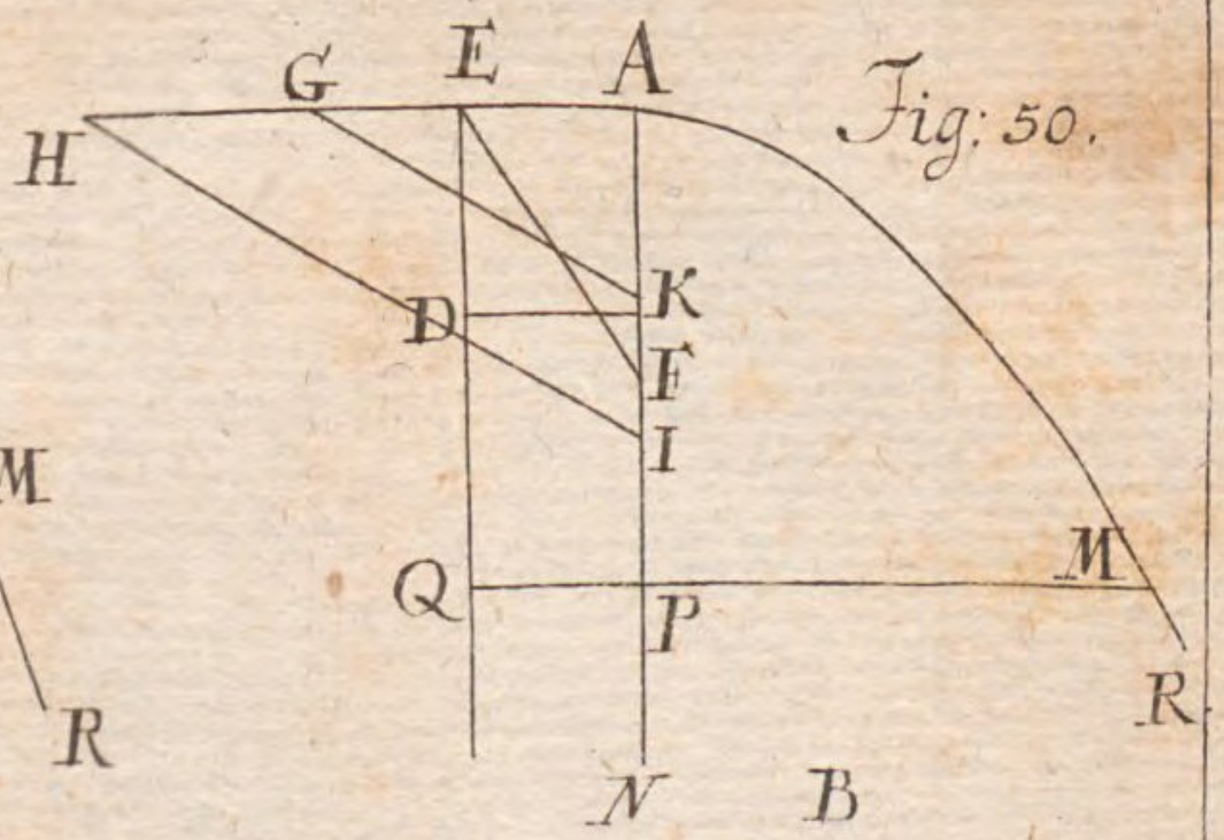


Fig: 50.

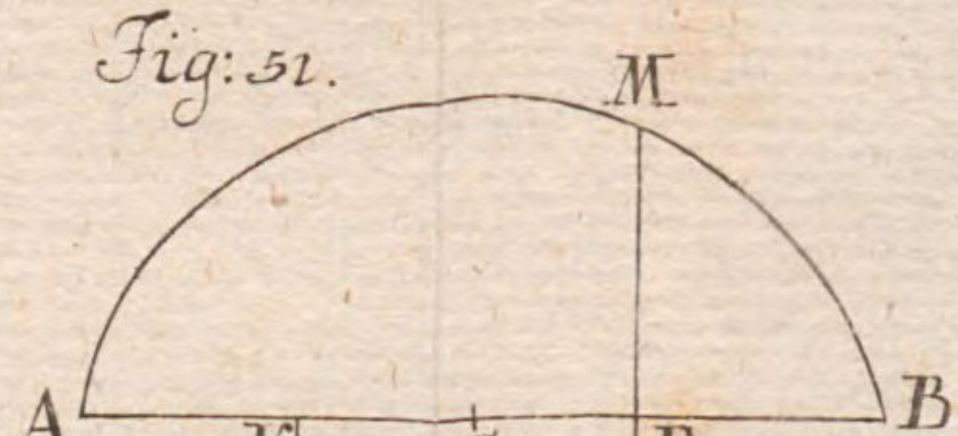


Fig: 51.

Fig: 52.

Fig: 53.

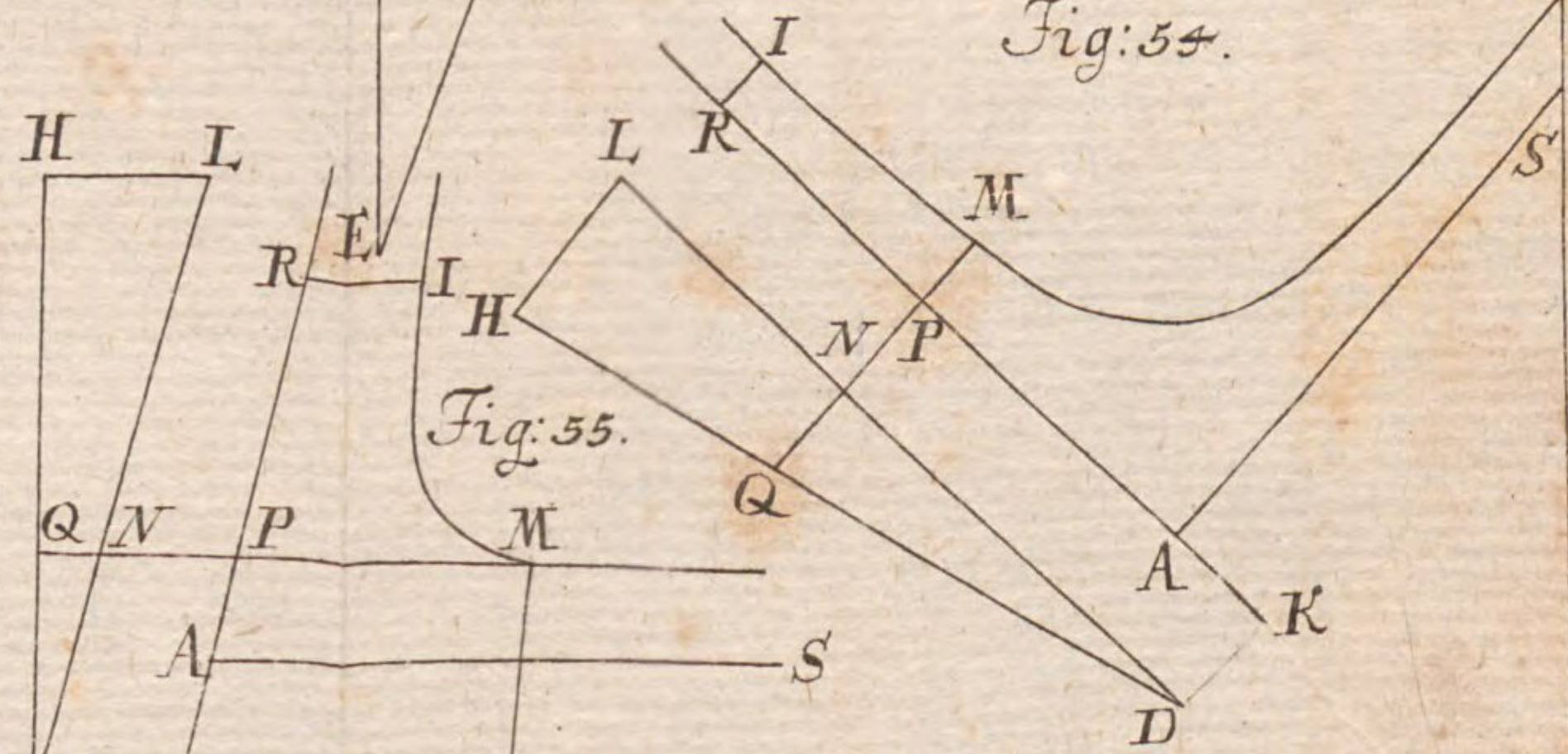


Fig: 54.

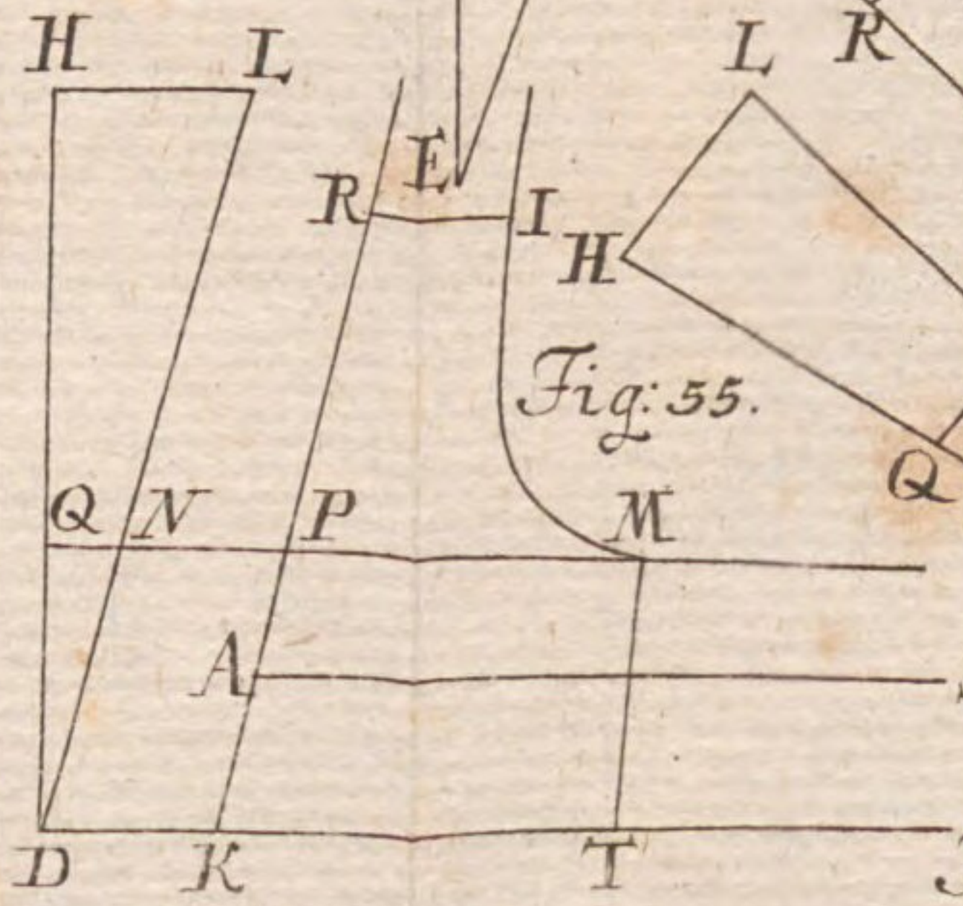


Fig: 55.

Fig: Algebr: Tab: VI. Lit: V. 5.

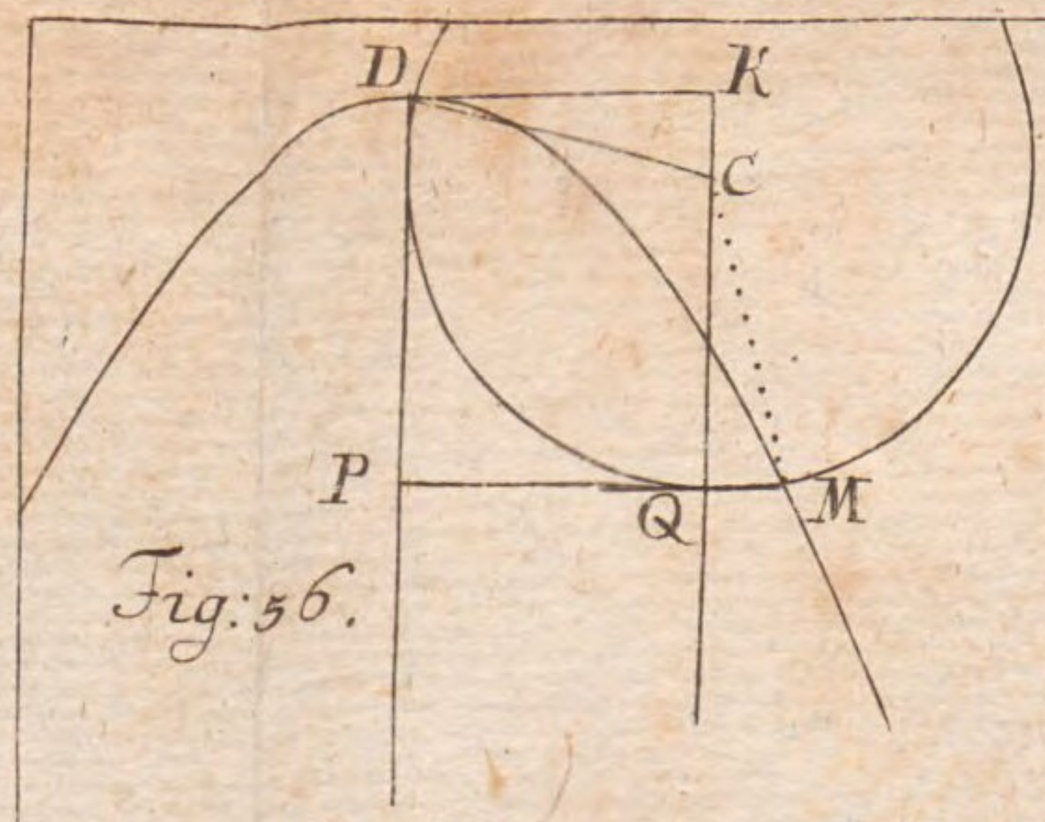


Fig: 56.

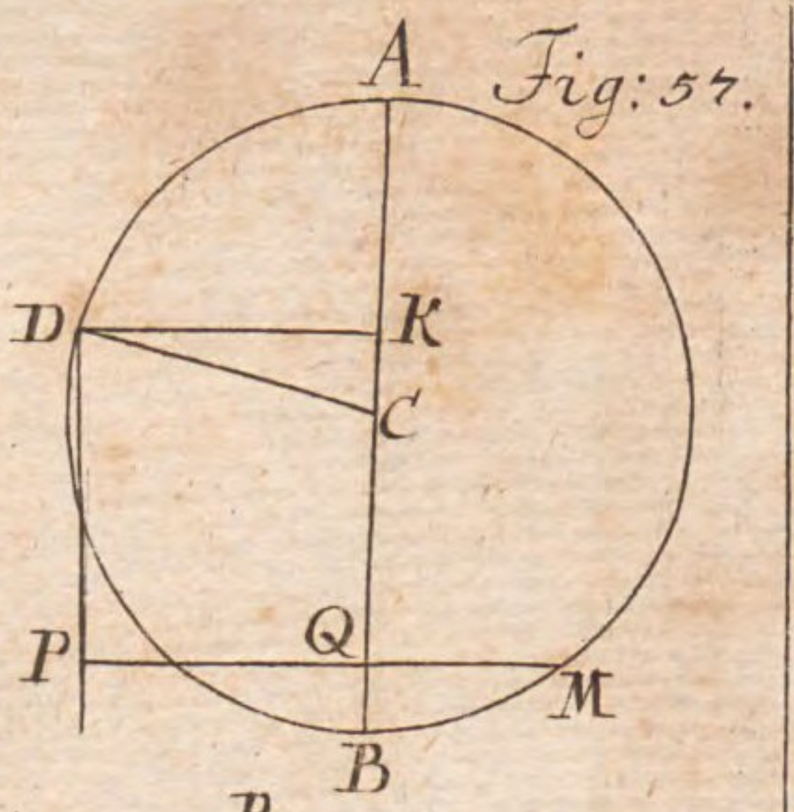


Fig: 57.

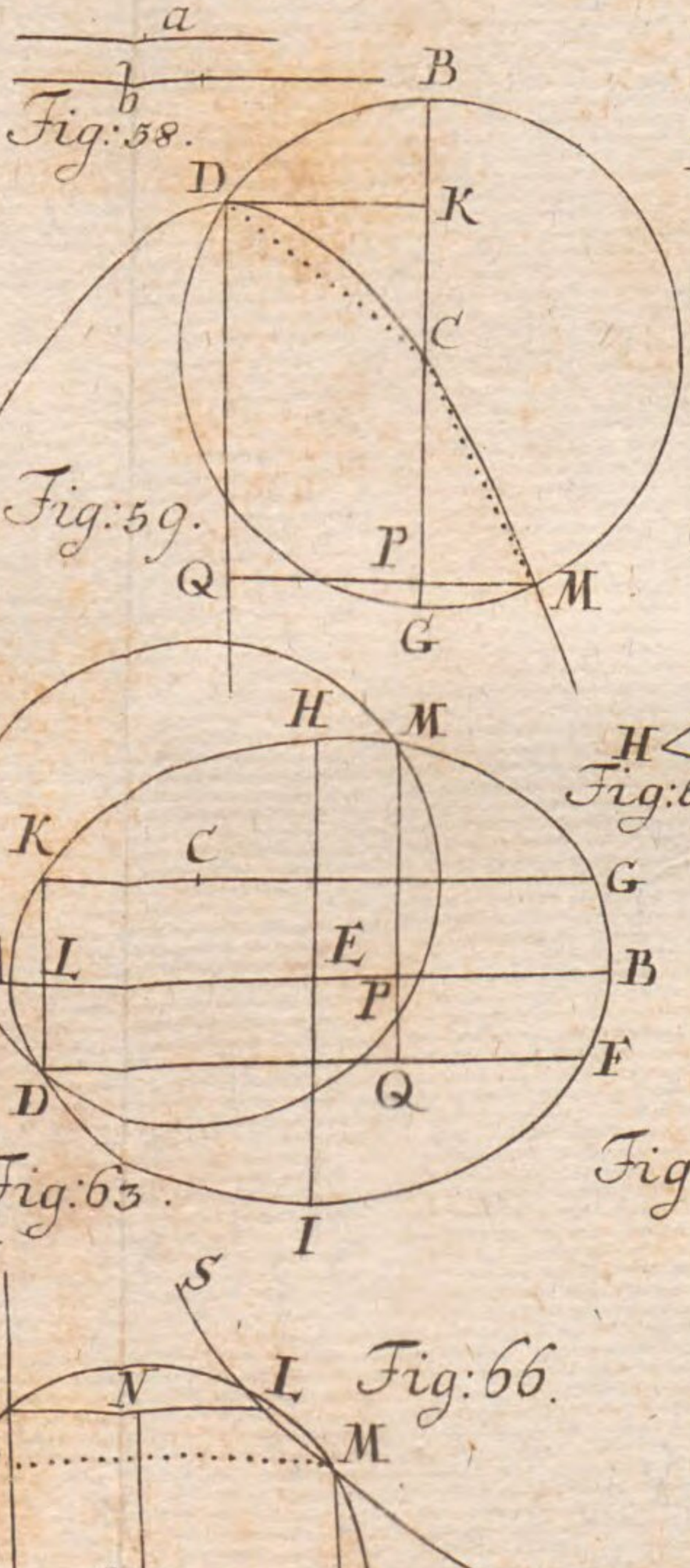


Fig: 58.

Fig: 59.

Fig: 63.

Fig: 66.

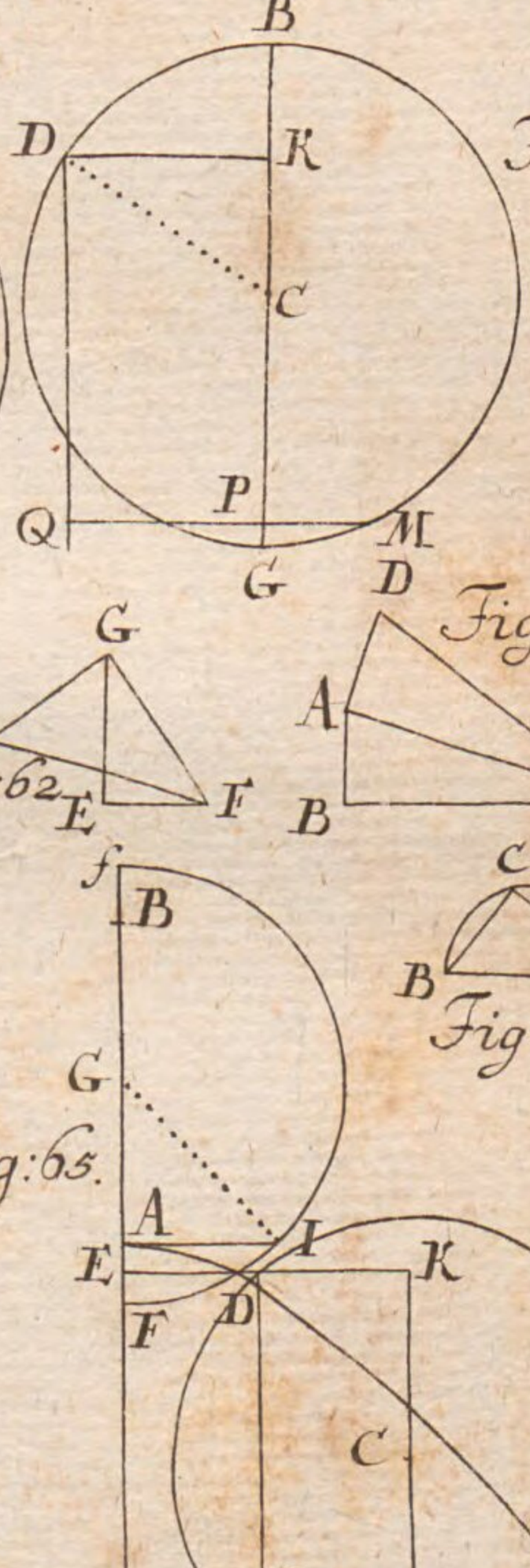


Fig: 60.

Fig: 61.

Fig: 62.

Fig: 64.

Fig: 65.

Fig: Algebr: Tab: VII.
Lit: W. 5.

Fig: 67.

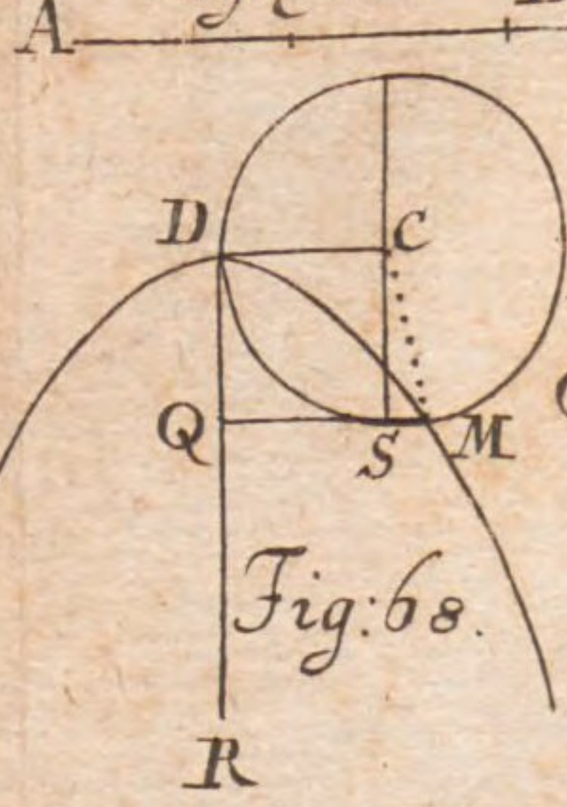


Fig: 68.

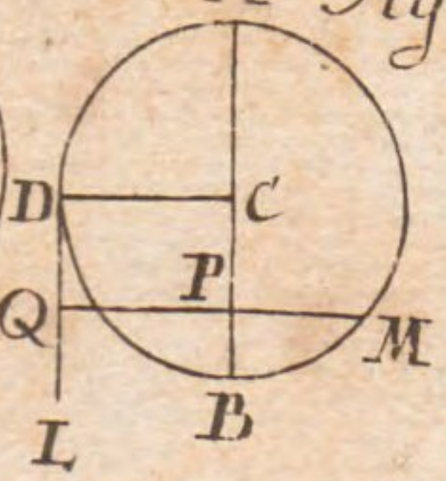


Fig: 69.

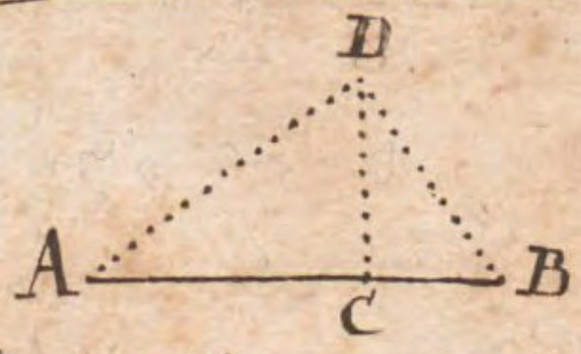


Fig: 70.

Fig: 71.

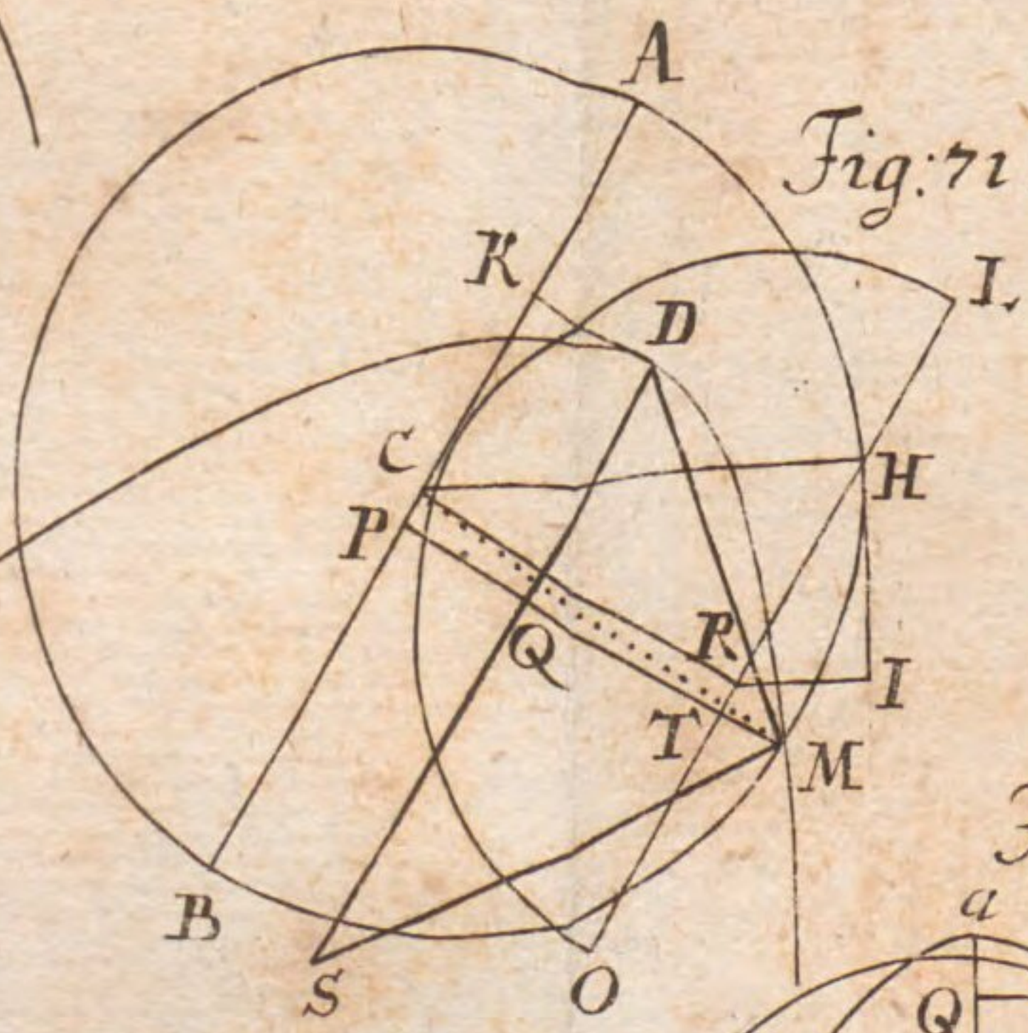


Fig: 72.

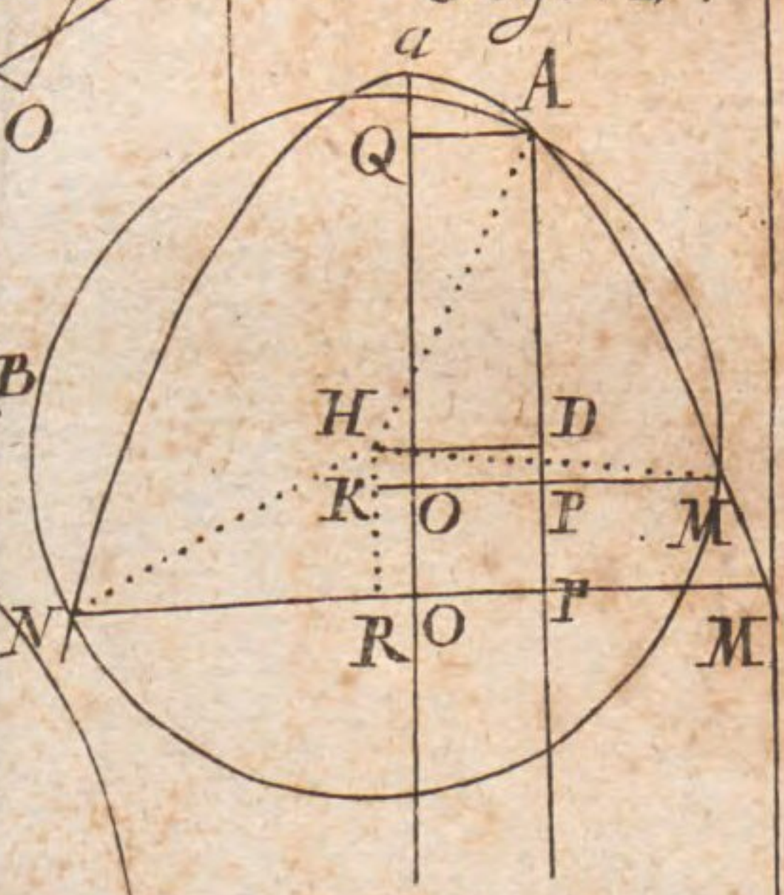


Fig: 73.

Fig: 74.

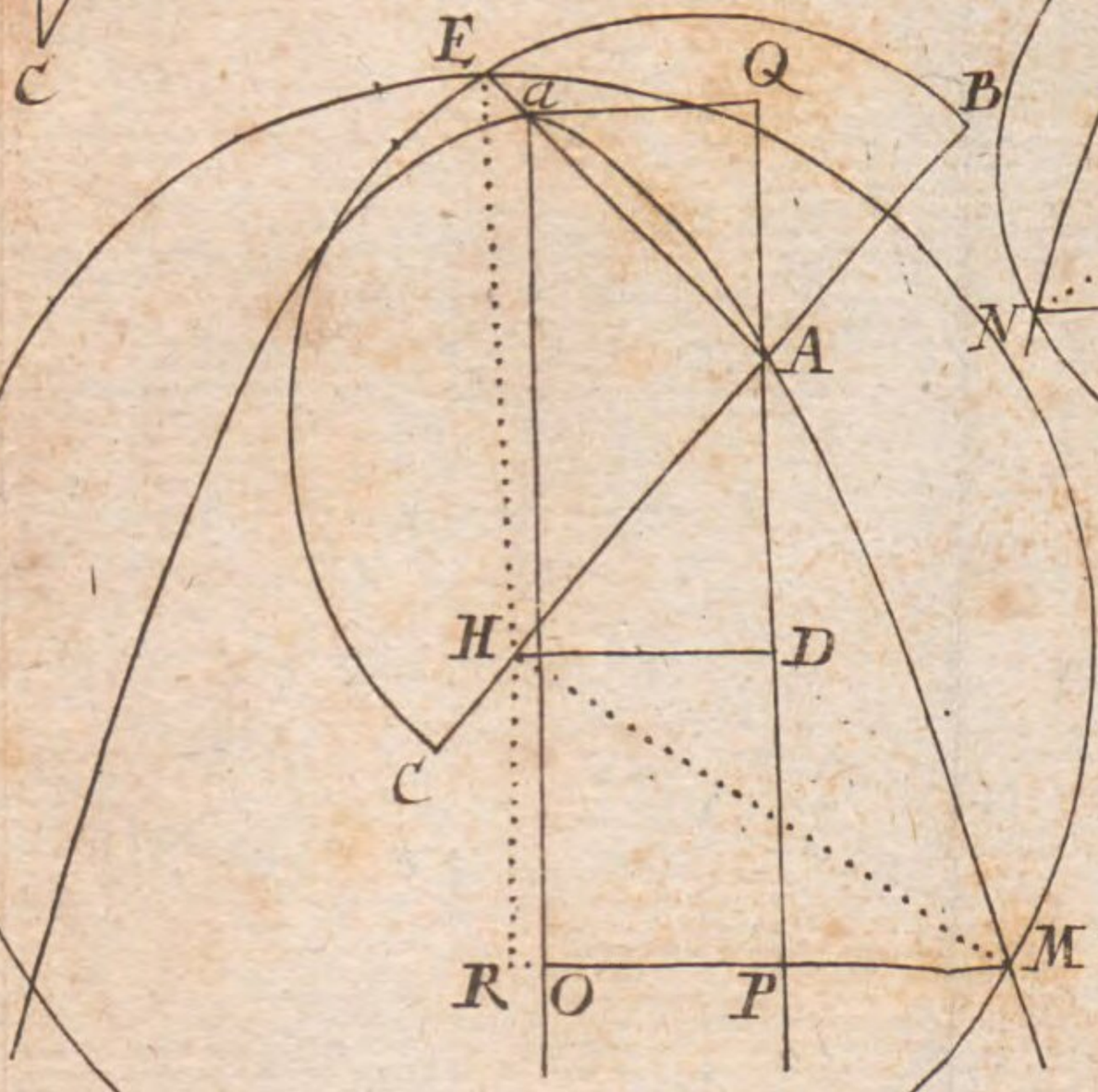


Fig: Algebr: Tab: VIII. Lit: X. 5.

Fig: 75.

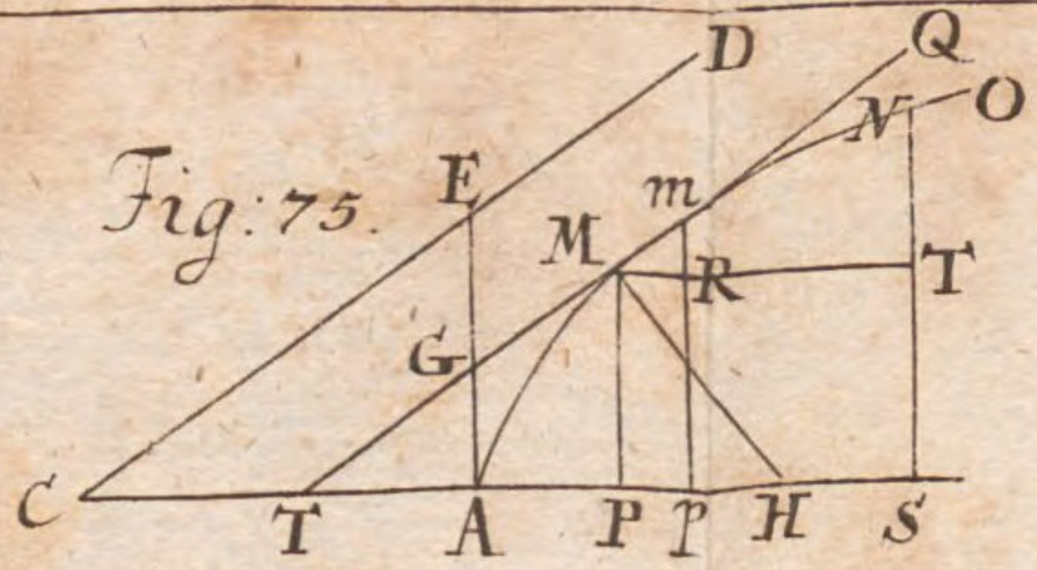
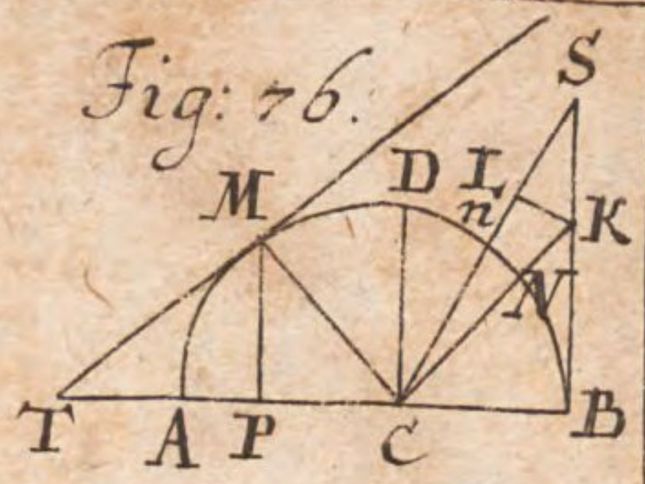


Fig: 76.



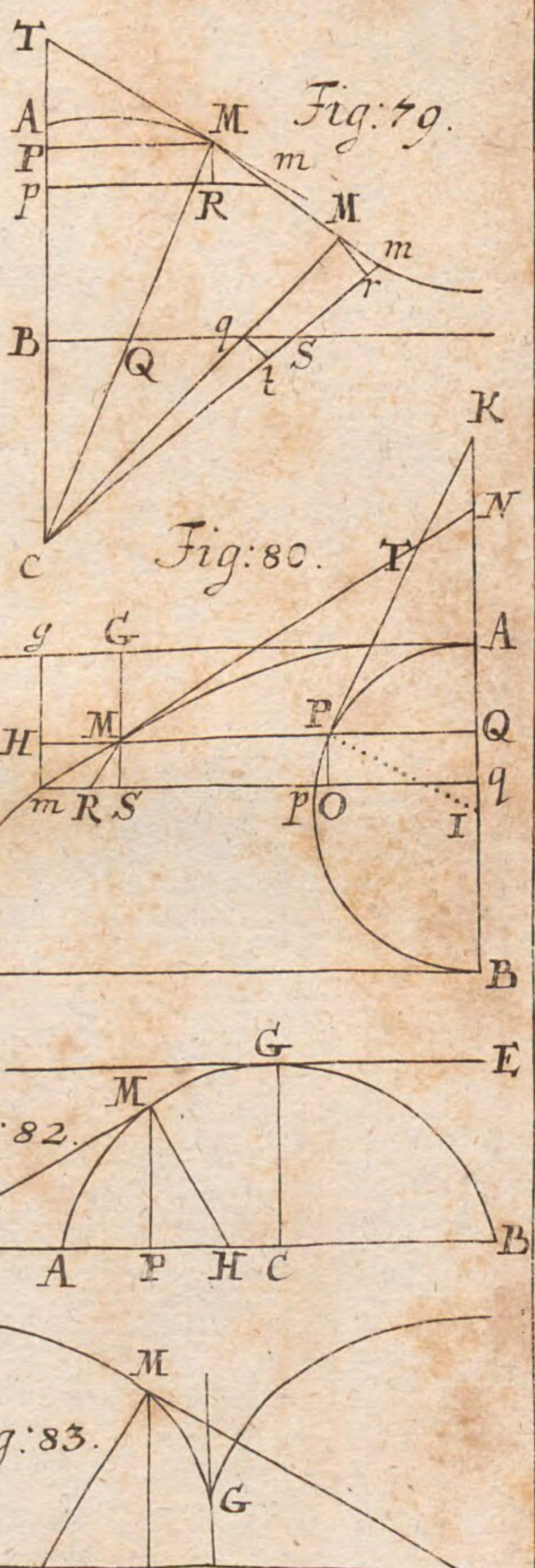


Fig: 77.

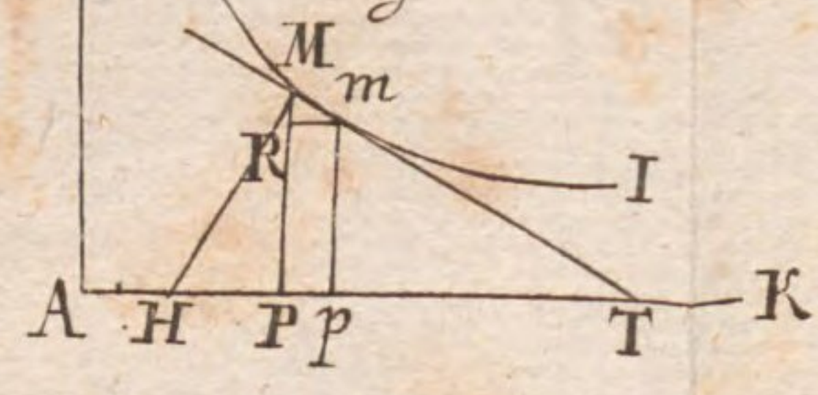


Fig: 78.

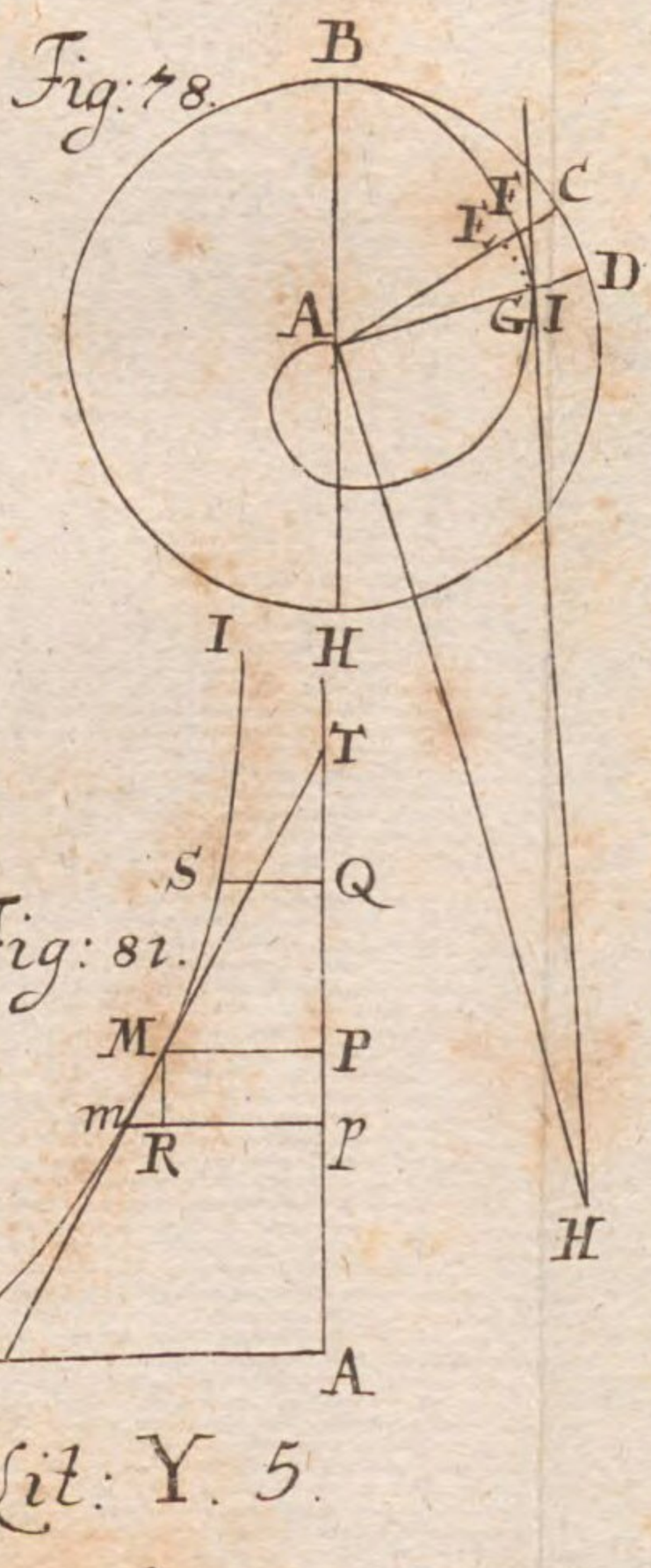


Fig: 81.

Fig: 82.

Fig: 83.

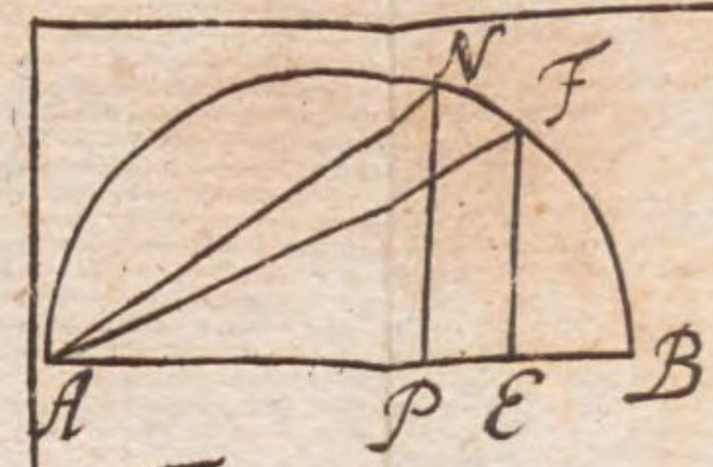


Fig: 84.

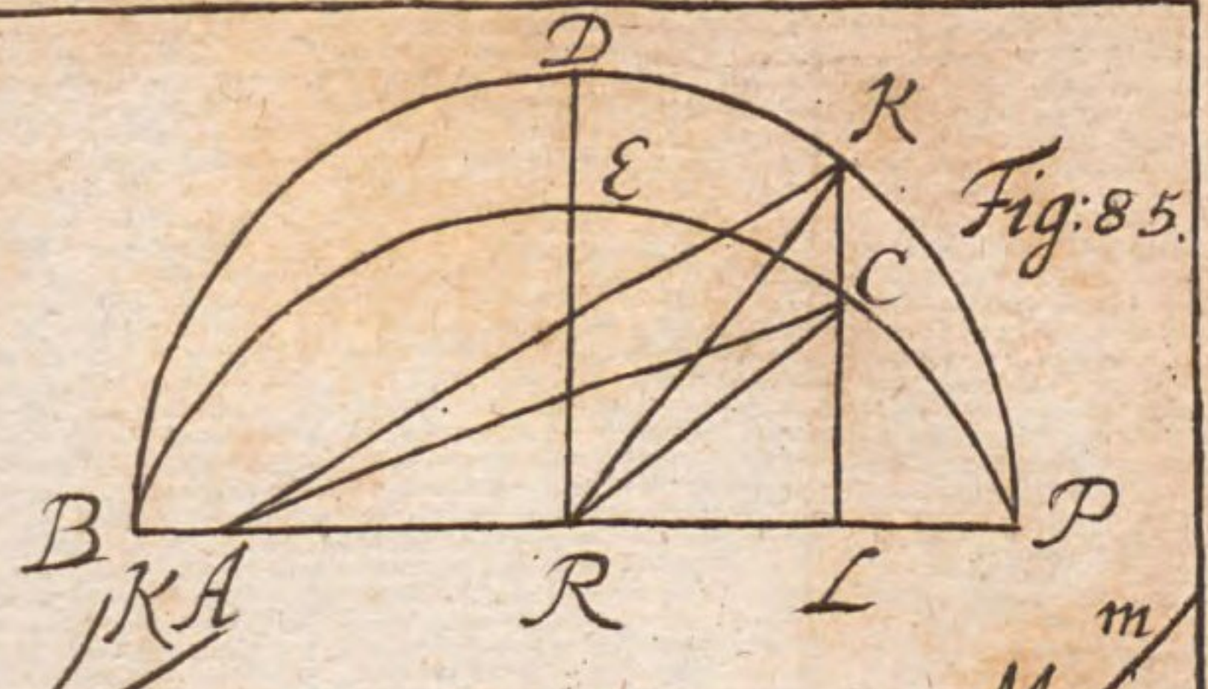


Fig: 85.

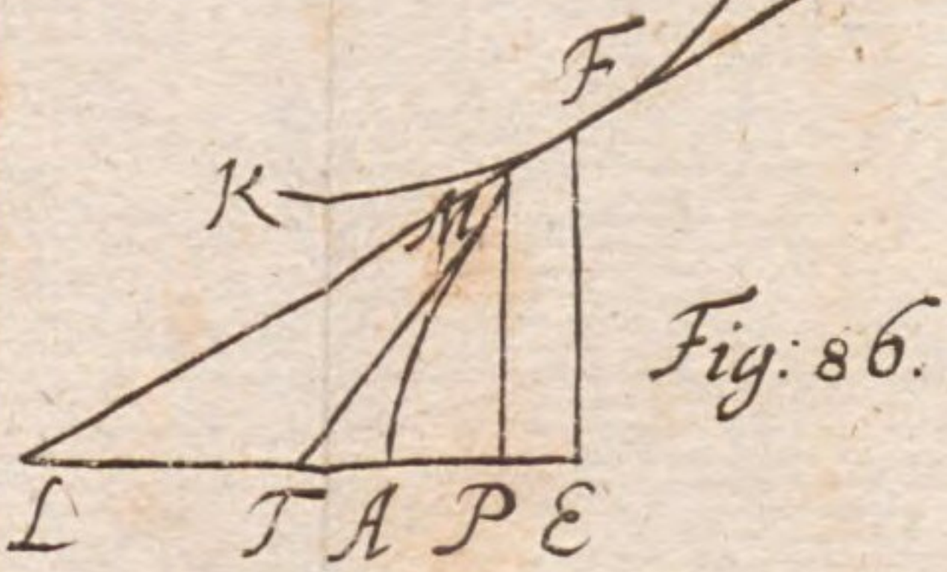


Fig: 86.

Fig: 87.

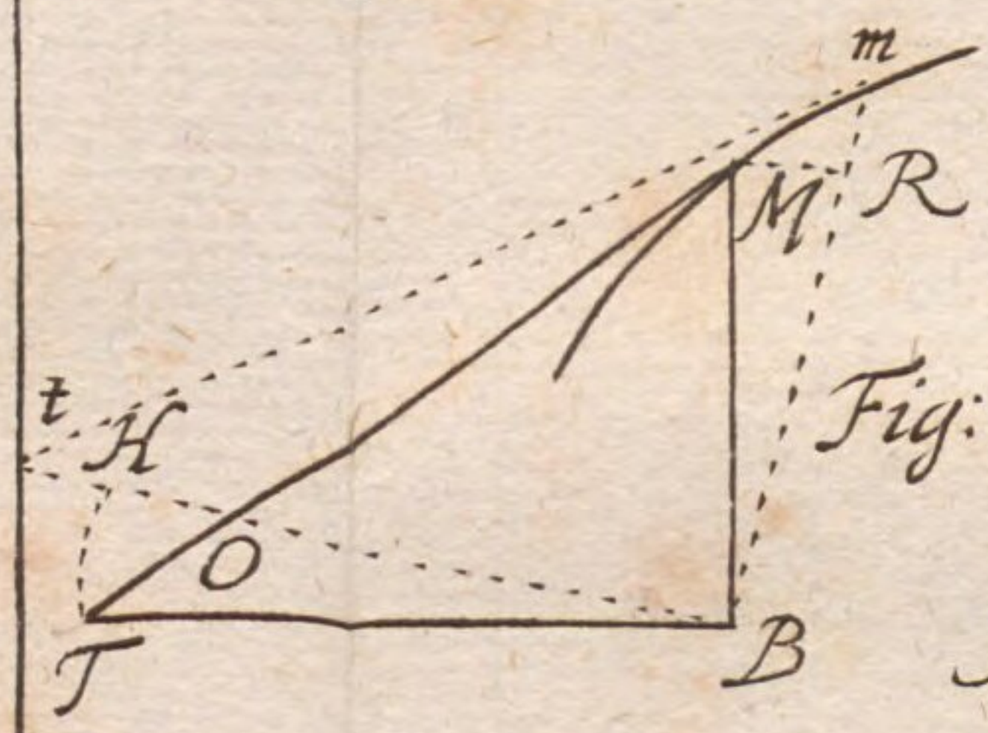


Fig: 88.

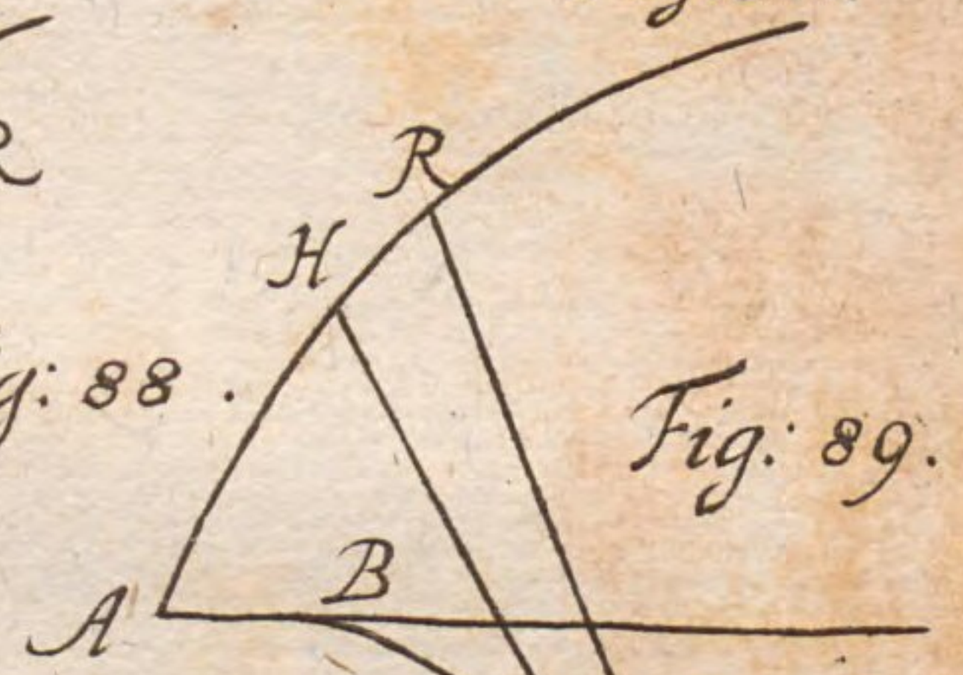


Fig: 89.

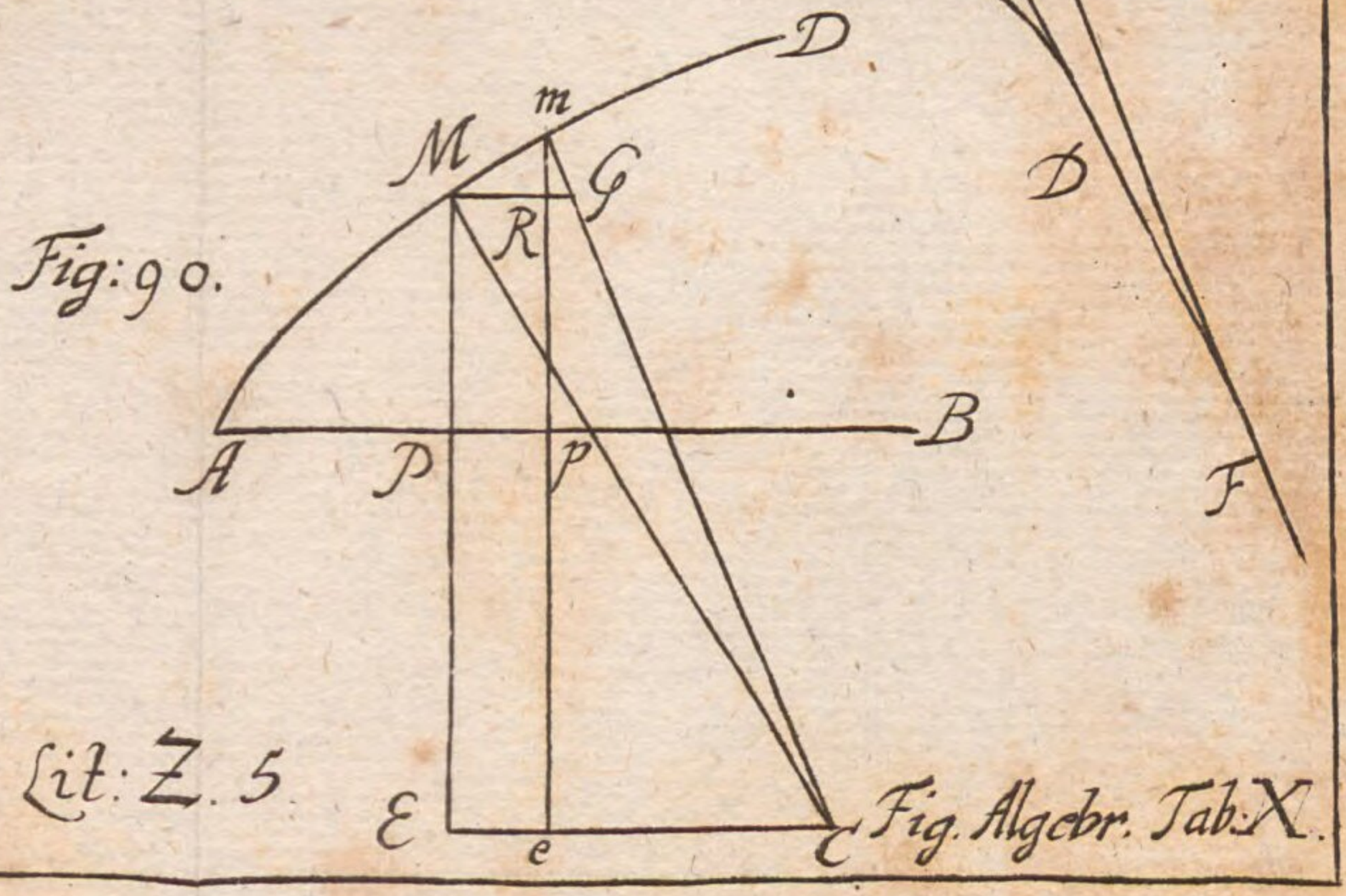


Fig: 90.

Lit: Z. 5

Fig. Algebr. Tab: X.

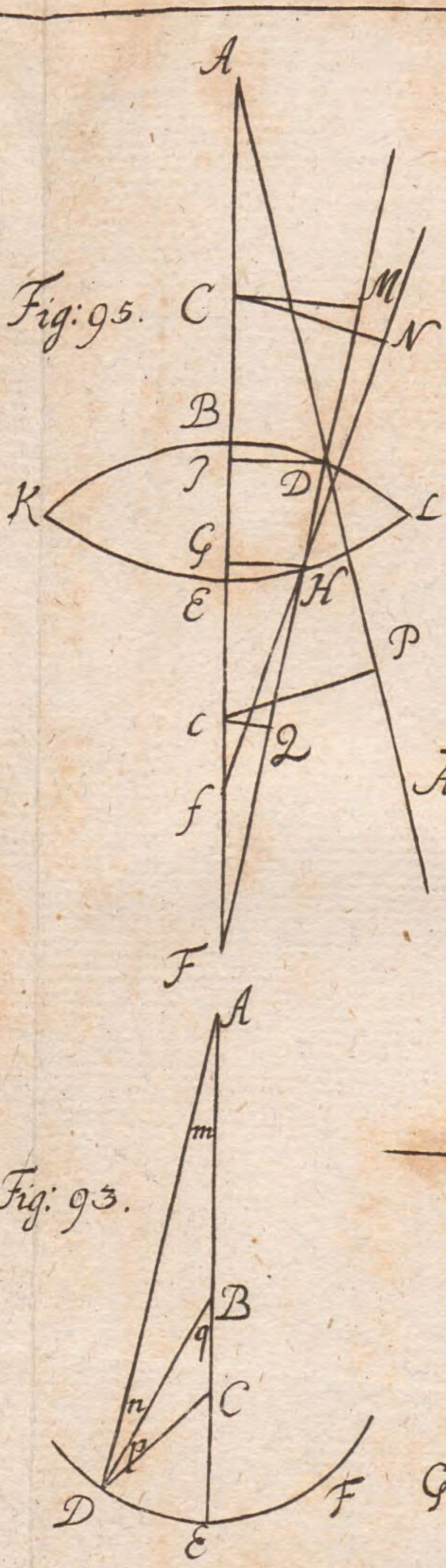


Fig: 95.

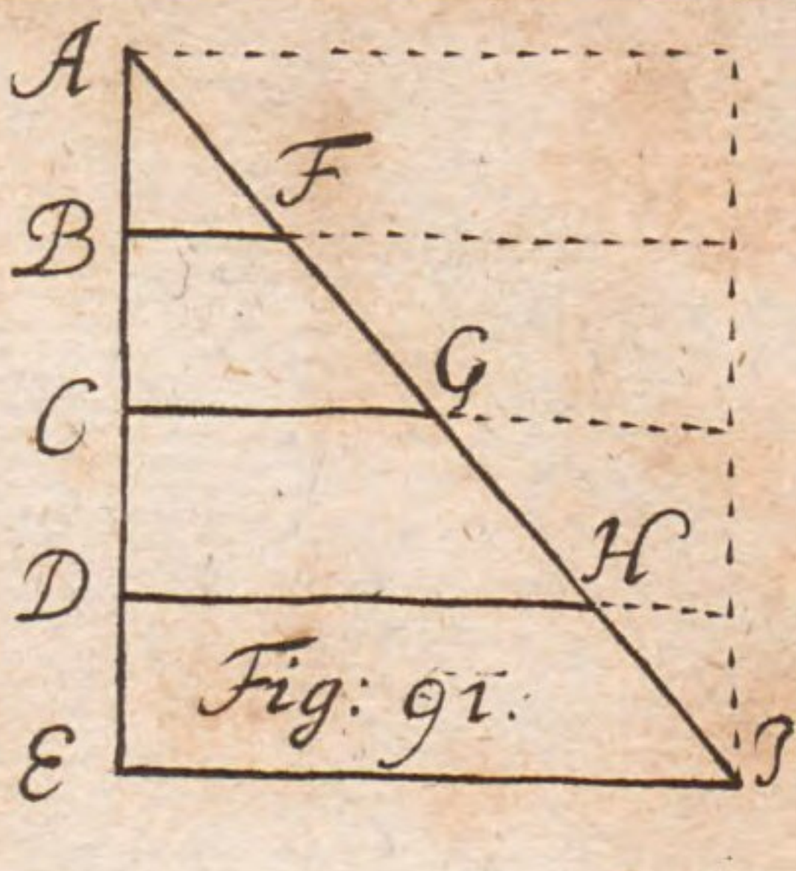


Fig: 91.

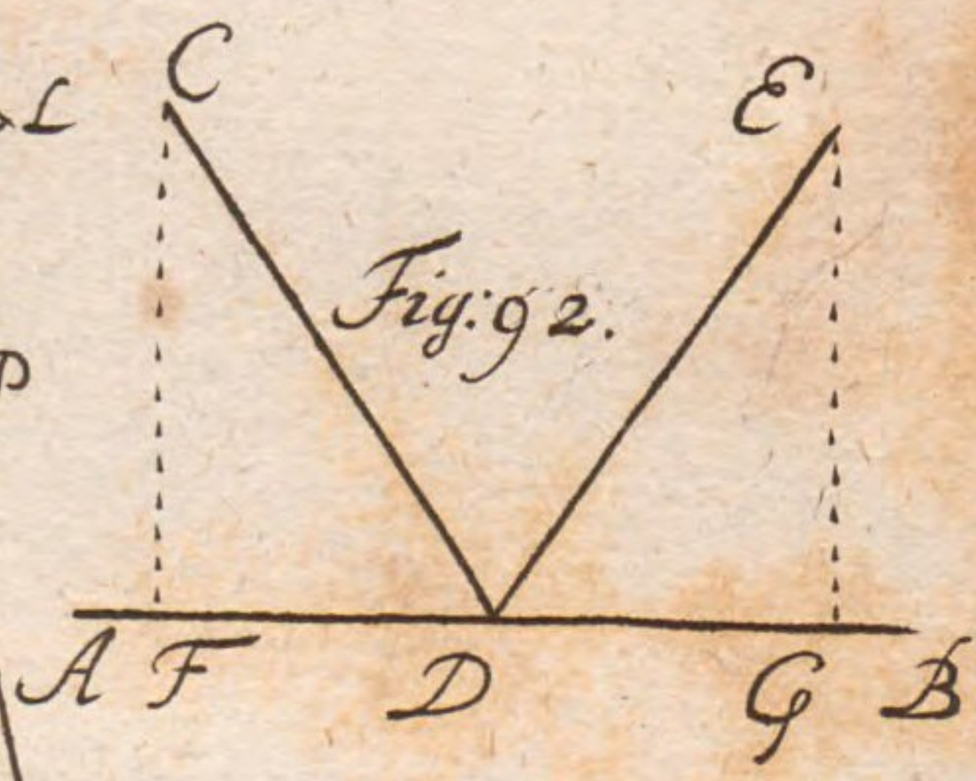


Fig: 92.

Fig: 93.

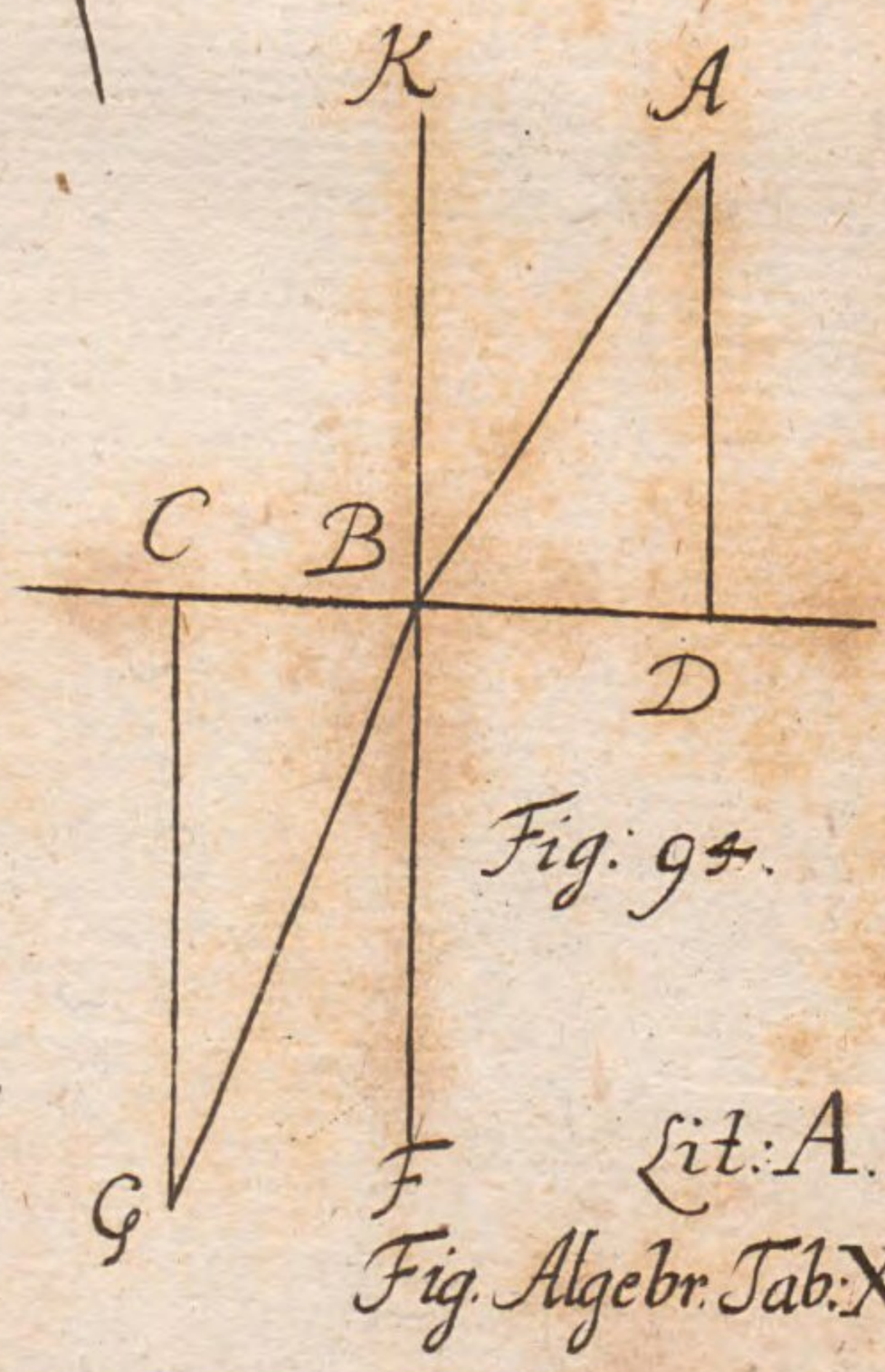


Fig: 94.

Lit: A. 6.

Fig. Algebr. Tab: XI.

Register
über alle vier Theile.

NB. Die Römische Zahl bedeutet den Theil/ die dabey gesetzte Ziffern aber die Seiten. Wenn im Anfange keine Römische Zahl stehet/ so ist der erste Theil zu verstehen; sonst aber der jenige / welcher vorhergehet.

A B, III. 533. 535
Aban mah, III. 531
Abdachung, II. 95
Abend. Erklärung, III 187. wie er zufinden, 191. 192
Abend = Demmerung/ III. 263. Ursachen, 265. 264. wie lange sie wehret, 268. wie das Ende auszurechnen 265. 266
Abend-Stern, III. 317
Abend-Uhren. Erklärung, III. 571. Zeichnung 581
Abgekürtzte Pyramide. Wie sie perspectivisch zu zeichnen, III. 123
Abgekürtzter Regel.

Wie sein Inhalt zu finden 219
Abgesonderte Theile, III. 142
Ablauff. Erklärung, 318
Zeichnung, 321. Gebrauch, 322. 324
Abscisse IV. 131
Abschnitt des Circuls. Wie er auszurechnen 279
Abweichende Uhr. Erklärung III. 571 Zeichnung, 582. & seqq.
Acht-Ecke. Wie seine Seite zu finden, IV 104
Achtel-Carthaune, II. 22 41. 50
Adar, III. 533. 535
Adar mah, III. 531
Addiren. Erklärung, 39
Regeln für gantze Zahlen, 39. 46. für gebrochene, 73. für Buchstaben, IV. 14 15. für Irrational-
Adspecte. Erklärung, III. 438. Zeichen und Bedeutung, 439. 440
Aehnligkeit, 108
der Circul 119
Figuren, 118. 178
Æquatio centri. Erklärung, III. 363. wie sie zu finden, 370
Æquation der Uhr, III 514
Æquatio optica, III. 363
physica, ibid.
Æquator, III. 183. 477
Æquinoctial-Uhr. Erklärung, III. 571. wie sie zu zeichnen, 572
Æquinoctium. Wie es zu observiren, III. 352
Æquatoris Grade. Wie sie in Zeit zu verwandeln, III. 216. 217
Aera, III. 537
Aerometrie II. 359. 361
Aesterich. Wie es zu schlagen, 428
Aggregat, 39
Aiyar, III. 533
Alcor, III. 243
Algebra IV. 7. 8

Algebraische Aufgaben in Zahlen, IV. 31. im menschlichen Leben, 39. in der gemeinen Geometrie, 102. in der höheren, 131
Algebraische Gleichung Nutzen in Erklärung der krummen Linien, IV. 131
Algebraische Linie. Erklärung, IV. 132. Geschlechte, 133. allgemeine Gleichung, 135
Subtangens, 268
Altar, III. 242
Alternatio rationum, IV 89
Altitudo nonagesimi, III, 272
Americanische Gans, III. 242
Amplitudo occidua. Erklärung, III. 222. wie sie zu finden, 223. Nutzen, 224
Amplitudo ortiva. Erklärung, III. 222. Wie sie zu finden, 223 224
Nutzen 224
Amphora, III. 196
Andreas, III. 243
Andromeda, III. 242
Ancker in Mauern, 402
Angle de l' epaule, II. 103
diminué, ib.
du centre, ibid.
Angulus acutus, 112
ad Solem, III. 363
obtusus, 112
orientis, III. 269
rectas, 112
Anlage der Böschung, II. 95
Anlauff. Erklärung, 318
Zeichnung, 321
Anliegende Theile, III 142
Anmerckungen 29
Anomalia coæquata, III 363
orbis, III. 392
Antarctische Polar-Circul, III. 199
Antares, III, 243
Antichthones III. 477
Antipodes, III. 477
Antinous, III. 242
Aphelium, III. 360. Wie es zu finden, 364. 365
seine Bewegung, 365

Apogæum, III. 360. Wie es zu finden 381
Apollonische Parabel, IV. 137
Approchen. Erklärung, II. 210. Beschaffenheit, 211. Wie sie zu führen, 213. zu hindern, 215
April, III. 528
Apsidum linea, III. 360
Arabisches Jahr, III. 534
Aræostylon, 366
Arcade, 364
Architrab. Erklärung, 316. wesentliche Glieder, 325. Höhe, 334
Auslauffung, 334
Arcitenens, III. 196
Arctische Polar-Circul III. 198
Arcturus, III. 243
Arcus inter centra, III. 443
Arcus visionis, III. 260
Ardabahesht mah, III. 531
Argonavis, III. 242
Argument der Inclination, III. 385
Aries, III. 196
Arithmetica infinitorum, IV. 99
Arithmetische Progression, IV. 68
Proportional-Zahlen. Wie sie zu finden, 88
Verhältnis, 67
Artillerie. Erklärung, II. 7. 8. Nutzen 5. 6. wie sie abzuhandeln, 7
Art zu zehlen, 43
Ascensional-Differenz. Erklärung, III. 214 wie sie zu observiren, 215
Ascensio obliqua, III. 216
recta, III. 214
Asini, III. 243
Astrolabium, III
Astronomie. Erklärung, III. 179. Nutzen, 177. 178
Astronomisches Fernglaß, III. 92
Astronomische Stunden, III. 515
Asymptoten. Erklärung, IV. 158. Wie sie zu finden, 271
Athyr, III. 529

Attaqven, II. 205.206
Attisches Jahr, III. 533 534
Aufgabe, 27. Wie sie algebraisch aufzulösen, IV. 29. 30
Aufgang der Sonne. Wie er zu finden, III. 222
der Sterne, III. 186. 252
Auge. Woraus es bestehet, III. 11. 12. Veränderungen, die bey dem Sehen darinnen vorgehen, 13. Beschaffenheit, wenn es in die Ferne und in die Nähe siehet, 16.
Aufgemachte Thüre. Wie sie ins Perspectiv zu bringen, III. 127
Augen-Gläser, III. 88
Augen-Punct, III. 119
Augustmonat, III. 528
Augustus, III. 528
Aufhebung eines Bruches, 72
Aufriß. Erklärung, 469
Wie er zu machen, 469. 470
Ausladung, 315
Aussage, 23
Ausschnitt des Circuls, 166
Ausdehnen, II. 363
Aussenwercke. Wozu sie dienen, II. 116. ihre Arten, 117. ihre Beschaffenheit, 120. 122.
Profil, 164
Aeussere Polygon, II. 101
Ausziehung der Wurzeln. Erklärung, 76
Regeln, 78. 84 Probe, 81. 86
Axe der Lafferen. Wie sie zu zeichnen, 38
Axiomata, 17
Axis mundi, III. 183
Axis in peritrochio. Erklärung, II. 233. Eigenschafften, 262
Azimuth. Erklärung, III. 222. Wie es zu finden, 223. 224
Azimuthal-Quadrant, III. 222
Babylonische Stunden, III. 516

Backsteine, 300
Bär der kleine und grosse, III. 242
Bäurisch Werck, 422, 423
Bahn der Planeten, III. 335. Was sie vor eine Linie ist, 359
Balcon, 415
Band, 318
Banquet, II. 94
Barometrum, II. 377
Baroscopium, ibid.
Bastard-Fenster, 405
Bastey, II. 99
Bastion, ibid.
Bathseba, III. 243
Batterie. Erklärung, II. 216. Zeichnung, 216
Bau-Art der Alten, 312
Bauholtz. Wie es beschaffen seyn sol, 295 wie es zu fällen, 295 296. zu trocknen, 297 im Bauen zu setzen, 298
Bau-Kunst, 283
Baumeister, 283
Bau-Unkosten. Wie sie im Festungs-baue zu rechnen, II. 197
Bauzeug, 292. 293
Bedeckung der Fern-Gläser. Erklärung, III. 102. Nutzen, 103 Wie sie zu finden, 103
Bedingung, 22. 23
Bebeman mah, III. 531
Begriff 6. 8
Benennung, IV. 39
Bequemlichkeit des Gebäudes, 284
Berge im Mond, III. 305. 306. ihr Schatten, 307. ihre Grösse, 428 in der *Venere*, III 317
Berme. Erklärung, II. III. Nutzen, 112
Beständige Defens-Linie. Erklärung, II. 101. Grösse, II. 104 105
Bewegliche Feste, III. 553
Bewegung. Regeln insgemein, IV. 365. ins besondere für die schweeren Cörper, 367. wie sie gesehen wird,

wird, III. 14. 38. 39. 40.
Bewegung des Mondes, III. 193. 399
der Planeten, III. 333
der Sterne, wie vielerley sie ist, III. 195
Bewegungs-Kunst, II. 229
Beweiß, 24. 26
Beyeinander, wenn die Sachen gesehen werden, III. 36. 37
Bild im Auge, wie es beschaffen, III. 13
Binomische Wurtzel, IV. 43
Biquadratische Gleichung. wie sie Geometrisch zu construiren, IV. 223. 244
Blätter, wozu sie in der Bau-Kunst gebraucht werden, 328
Blondells Fortification. Maximen, II. 147. Ausrechnung der Linien und Winckel, 149. Zeichnung, 154. Profil, 156
Bodenstücke, II. 30. 31
Bock in der Artillerie, II. 39
Böschung, II. 95
Bogen, wie er auszurechnen, 275. wie daraus der Sinus zu finden, IV. 326. 329. wie der Tangens zu finden, 323
Bogen in Arcaden wie er beschaffen, 370. 371
Bogen-Schuß, II. 50
Bogenstellung. Erklärung, 364. Zeichnung, 377. Einrichtung, 382
Bogen zwischen den Mittelpuncten, III. 443
Böller, II. 51
Bollwercke. Erklärung, II. 99. Figur, 99. 100
Bollwercks-Winckel. Erklärung, II. 103. Grösse, 105
Boltzen, II. 38
Bombe, II. 56. 57. 58

Bootes, III. 242
Boussole, 198. 202
Borten/ 316
Brachmonat, III. 528
Brandröhre in der Bombe, II. 56
Carcaße, II. 62
Brand-Maure/ 403
Breite des Flusses, wie sie zu messen, 132 133.
des Monds, wie sie zu finden, III. 415
der Planeten. wie sie observiret wird, III. 333 335. wie sie zu finden, 392. 393
des Sternes. Erklärung, III. 236. wie sie zu finden, 237. ob sie veränderlich, 247
eines Ortes. Erklärung, III. 434. wie sie zu finden, 484 485
Brenn-Glaß, III. 75 76. 79
Brenn-Punct. Erklärung, IV. 139. wie er zu finden in der Parabel, 139. in der Ellipsi, 146. in der Hyperbel, 153. 154. in den Brenn-Gläsern. III. 74. 76. 79
Brenn-Spiegel, III. 62. 63. 64
Brill. Zeichnung, II. 156. 164. 165. Profil, 165
Bruch. Erklärung, 71 wie er geschrieben wird, 71 sein Werth, 71. Veränderungen, 72. Rechnung, 73 Logarithmus, 252 253. wie unendliche zu summiren, IV. 97. wie sie aus Gleichungen wegzuschaffen, IV. 327
Brustfelgen, 270
Brustlehne, 419. 420
Brustwehr, II. 93. 94
Büchsenmeisterey-Kunst, II. 8

Buch-

Buchstabe-Rechenkunst, IV, 8

CAlendæ, III. 528
Calender/ wie er zu machen, III. 557. 558
Caliber, II. 24.
Caliber-Stab. Erklärung, II. 24. Zubereitung, 27
Camera obscura, III. 16. 17
Camin, wie er zu bauen, 444
Cancer, III. 196
Canonen-Schwefel, II. 10
Canun/ III. 533
Capella cum hoedis, III. 243
Caper, III. 196
Capitäl. Erklärung, 316. wesentliche Glieder 325. Höhe, 334 Auslauffung, 334
Capital-Linie, II. 102
Caponieres, II. 123
Carcassen, II. 62
Cardinal-Gegenden/ III. 498
Carthaune/ II. 21. 22. 41
Casleu, III. 535
Cassiopeja, III. 242
Castelle, II. 182
Castor, III. 243
Catalogi fixarum, III. 241. 242
Catoptrick/ III. 45
Centaurus, III. 242.
Centri-Winckel/ II. 103
Centrum, 110
gravitatis, II. 237
magnitudinis, II. 237
Cepheus, III. 242
Chaldäischer Scrupel, III. 522
Chamæleon, III. 242
Characteres Chronologici, III. 537
Chemin Couvert, II. 121
Chojac, III. 529
Chorda, 110
Chordad mah, III. 531
Christmonath/ III. 528
Chronologie, III. 513
Circul. Erklärung, 110
Eigenschafft, 110. 166.

166. 168. IV. 126
282. 283. Einthei-
lung, I. III. Aus-
rechnung, 167. 169
Beschreibung, 149
Quadratur, IV. 305
Rectification, 321
Subtangens, 264. wie
er ins Perspectiv zu-
bringen, III. 121
Circul der Länge und
Breite, III. 235
Circul von höheren
Geschlechten, IV
152. 265
Circul-Bogen, 117
147
Circuli diurni, III. 187
Circumvallations-Li-
nien, II. 208
Cissois. Erklärung, IV.
168. Eigenschafft
und Gleichung, 169
Citadellen. Erklärung,
II. 182. Beschaffen-
heit, 183. 184. Zeich-
nung, 184
Citationes, 25
Climata, III. 494. 496
Coæquirte Anomalie.
Erklärung, III. 362
wie sie zu finden,
III. 369. 371
Cörper. wie er perspe-
ctivisch zu zeichnen,
III. 122
Cörper von leichterer
Art, II. 327
von schwererer
Art, II. 328
Cörperlicher Inhalt,
wie er zu finden, 208
Ort, IV. 210
Colonnate. Erklärung,
364. Beschaffenheit,
369. 370
Cometen, was man
von ihnen observi-
ret, III. 434. ihr Na-
tur, 437. ihr Ort,
436. und Schweiff,
437
Commutations-Win-
ckel, III. 390
Compositio rationum,
IV. 89
Conchilis, IV. 167
Conchois. Erklärung,
IV. 167. Glei-
chung, 167. 168. A-
symptote, 167. Sub-
tangens, 276. Wen-
dungs-

dungs-Punct 357
Conus. Erklärung, 115
Eigenschafften, 116
II. 330. IV. 129. 290
291. Ausrechnung,
IV. 314. 330
Conischer-Spiegel.
Erklärung, III. 45
wie sie zu machen,
53. Eigenschafften,
56. 57
Conjunction, III. 438
Contra-Minen, II. 124
Contravallations-Linien, II. 207. 209
Contregarde. Erklärung, II. 117. Zeichnung, 146. Nutzen,
118
Contrescarpe. Erklärung, II. 121. wie sie
zu erobern 219. 320
Conversio rationum,
IV. 89
Corinthische Ordnung.
Erklärung, I. 331
Glieder, 349
Corneæ, III. 11
Corollariæ, 28
Cortinel II. 100
Cosinus, 244
Crater, III. 242
Crepusculum matutinum, III. 263
vespertinum, III.
263
Creutzgewölbe, 436
Cubatur, IV. 329
Cubic-Maaß, 209
Cubic-Ruthe, Schuh,
Zoll, Linie, 209
210
Cubic-Wurtzel. Erklärung, 76. wie sie
auszuziehen, 81. IV.
50. ihr logarithmus,
252
Cubic-Zahlen. ihre
Differentien, IV. 63
ihr logarithmus, 251
Cubiren, IV. 329
Cubische Gleichung,
wie daraus die Wurtzel zu ziehen, IV. 190
wie sie Geometrisch
zu construiren, 223
244
Cubus. Erklärung 115
Eigenschafften, 115
wie sein Inhalt auszurechnen, 208
Cutirte Weite. Erklärung,

rung, III. 385. wie sie zu finden, 389
Curtirung, III. 386
Crystallene Feuchtigkeit, III. 12
Cyclois. Erklärung, IV 171. Eigenschafften, 171. Subtangens, 278
Cyclus indictionum, III. 547
Lunæ, III. 542
Solis, III. 539
Cylinder. Erklärung, 114. Eigenschafft, 115. 210. II. 329. IV 126. Ausrechnung, 214. 227. 228. Netze, 237
Cylindrische Spiegel. Erklärung, III. 45 wie sie zu machen, 53. Eigenschafften, 55

D

Ach. Erklärung, 387. Höhe, 459
Arten, 460. 461
Materie, 461
Dach *à la mansarde*, 460
Dampff-Kugel. Erklärung, II. 63. wie sie zu machen, 66
Dauerhafftigkeit des Bauzeuges. wie sie zu beurtheilen, 293 des Gebäudes / wie sie zu beurtheilen, 28
David, III. 243
December, III. 558
Declination eines Sternes. Erklärung, III. 201. wie sie zu finden, 206. ihr Nutzen, 207 der Ecliptick / III. 208. 210
Declinirende Uhren, III. 571
Decke, 432
Deckel / 315
Defendirende Linie, II. 88
Defension / wie sie einzurichten, II. 87
Defens-Linie / II. 88
Definitio, 5
nominalis & realis, 6
les Dehors, II. 115
Delphin / III. 242

Delphine in der Artillerie, II. 31
Demonstrationes, 26
Demigorge, II. 102
Demilune, II. 117
Descensional = Differenz/ III. 214
Deutlich, wenn Sachen gesehen werden, III. 15
Deutlicher Begriff/ 7
Diabetes, II. 412
Diagonal, 157
Diameter, Erklärung/ 110. Verhältniß zur Peripherie des Circuls, 167. 168. 276
Diameter der Planeten, wie er zu finden, III. 422. 423
einer krummen Linie/ IV. 131
der Erde/ wie er zu messen/ III. 479. 480
Diastylon, 366
Dickſäulig, 366
Dielen, 426. 427
Differentiæ ascensionales, III. 216
Differential = Größe, IV. 255. wie sie zu differentiiren, 351
Differential = Rechnung/ IV. 253
Differentiiren. Erklärung/ IV. 255. Regeln für die veränderlichen Grössen/ 256. für die Exponential = Grössen, 345. für die Differential = Grössen, 351
Differentio = differentiiren IV. 350
Differenz/ 39
Dignität. Erklärung, IV. 20. Eigenschafften, 55. 67. 68. allgemeine Regel für dieselben, 57
Di mah, III. 531
Dioptrick III. 70
Directions = Linie/ II. 236
der schweren Cörper/ II. 242. 243
Directus, III. 334
Distanz = Punct/ III. 119

Divi-

Dividendus, 41
Dividiren. Erklärung, 40. 41. Regeln für gantze Zahlen, 60 für gebrochene, 75 für Buchstaben, IV. 19. für Irrational-Zahlen, 29. wie es ohne das einmahl eines geschiehet, I. 64. Zeichen, 67. IV. 13
Divisio rationum, IV. 89
Divisor, 14
Dodecaëdrum. Erklärung, 234. Netze, 231. 236
Doppelt wenn etwas gesehen wird, III. 43
Doppelte Eckenzierde/ 415
Hohlkehle/ 321
Dorado, III. 243
Dorische Ordnung. Erklärung, 332. Glieder, 339
Drache/ III. 242
Drachen-Kopff/ III. 399
Drachen-Monath/ III. 399
Drachen-Schwantz/ III. 399
Dreyecke. Erklärung, 112. Eigenschafften, 117. wie seine Höhe zu finden, IV. 112. 113
Dreyvierthel-Carthaune/ II. 22. 41. 50
Drosirung/ II. 95
Druck der flüßigen Cörper/ II. 333
Druckwerck/ II. 401
Dulheggia, III. 535
Dulkaadah, III. 535
Dunckel. Warumb ein Cörper aussiehet, II. 33
Dunckeler Begriff, 6. 7
Durchmesser, 110
Durchschnitt des Gebäudes, 470
einer Festung, II. 140

Ebener Ort, IV. 210
Eccentricität. Erklärung, III. 360
Wie sie zu finden, 363. 379. ihre Grösse, 394
Ei-

Eccentrische Anomalie/ III. 362
Eccentrischer Circul/ III 362
Ort des Planetens, III. 385
Eckenzierde. Wie sie zu zeichnen, 414-415
Ecliptick. Erklärung, III. 195. 477. Eintheilung, 196. gröste Declination, 208
Egyptisches Jahr, III. 529
Eigene Bewegung, III. 195
Einfache Eckenzierde/ 414
Einfacher Ort/ IV. 210
Einfallendes Licht, 406
Einfalls-Winckel, III. 9
Ein mahl eins/ 53. 54. 67. III. 244
Eintheilung des Gebäudes. Wie sie zu finden, 440
Einziehung/ 318
Einziehung der Mauern/ 399. 400
Elastische Krafft der Lufft/ II. 366. 369
Element einer Fläche, IV. 295
Elephant, III. 244
Ellipsis. Erklärung, IV 143. Eigenschafften, 144. 283. 286. 309. 310
Gleichung, 143. 149
Beschreibung, 151
Qvadratur, 308. 309
Subtangens, 265. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 165. ist die Bahn der Planeten, III. 359
Ellipses von höheren Geschlechten/ IV. 151. 152. 266
Elliptische Affter-Kugel, IV. 332
Elongations-Winckel/ III. 390
Elul, III. 523. 535
Entgegensetzung, III. 438
Entfernung vom Kuhe-Puncte/ II. 236
Erde. Ihre Figur. 475. 476. Grösse, 479. 480. Bewegung/ 344
ist ein Punct in Ansehung der Welt-
Ku-

Kugel, 201. wie groß sie im Mond gesehen wird, 430. wie sie daselbst aussiehet, 431. ihr ab- und zunehmendes Licht, 430. 431. wie starck sie den Mond erleuchtet, 424
Erdfinsterniß, III. 307
Erdkugel, wie sie zu verfertigen, III. 500 ihr Gebrauch, 503
Erdreich, wie seine Beschaffenheit zuerforschen, 389. wie das lockere zu befestigen, 390
Erfahrungen. Was sie sind, 17. Ihre Beschaffenheit, 18. 19 Wenn man sie anführen muß, 19. 20
Erhabener Spiegel. Erklärung, III. 45. wie er zu machen, 52. Eigenschafften, IV. 53
Erhabenes Glaß. Erklärung, III. 72. Eigenschafft, 74. 77. 80. 84. IV
Eridanus, III. 242
Erkäntnis der Natur. Wie sie beschaffen, III. 343. 344
Erklärung, §. 6. wie sie bey den Mathematicis beschaffen, 8 der Wörter, 6. 8. 9. 10 II. 12 der Sachen, 6. 12. 13
Erleuchtung der Kugel, III. 21
Epacta. Erklärung, III. 544. Wie sie zu finden, 546. 547
Epocha, III. 537
Epiphi, III. 529
Equuleus, III. 242
Esphandarmod mah, III. 531
Esplanade, II. 121
Europäische Stunden, III. 516
Eurythmie. Erklärung, 291. Grund, 291. 292 Gebrauch, 291
Eustylon, 366
Evolute, IV. 359
Exponens rationis, 68
Exponential-Grössen.

sen, Erklärung, IV. 345. wie sie zu differentiiren, 345. wie sie zu integriren, 348
Exponential-Linien, IV. 346
Exponential-Rechnung, IV. 345

FAces, Erklärung, II. 99. Grösse, 110
Fackeln der Sonne, III. 287. 288
Factores, 40
Factum, 40
Fäßer, wie sie zu visiren, 230
Falckaune, II. 22. 41
Falsche Wage, wie sie zuerkennen, II. 249 zu gebrauchen, 250. zubessern, 252
Familie der algebraischen Linien, IV. 134
Farben, wie sie entstehen, III. 29 des Monds in Finsternissen, III. 300. 301
Farbigte Haut, III. 12
Faschinen, II. 200
Februarius, III. 528
Feder, wie dadurch Machinen zu bewegen, II. 415. 416
Felder-Decke von Holtze, 432 von Gypse, 434
Feldmessen, 193
Feldschantzen. Erklärung II. 184. Grundrisse, 186. Profil, 185
Fenster. Erklärung, 403. Beschaffenheit, 403. 404. Höhe und Breite, 404. 405 407. 408. wie sie übereinander zu setzen, 408. zu bauen, 409. 420. zu zieren, 409. 418. 419. ins Perspectiv zu bringen, III. 126. wie viel in jedes Gemach gehören, I. 438. 439
Fenster-Creutze, 403 404
Fernglaß. Erklärung, III. 87. Erfinder, 87 Röhren dazu, 88 Gestelle, 96. wie viel

es vergrössert, 100
warum die grossen mehr vergrössern. 102
Fernglaß in der Astronomie, III. 92
auf der Erden, III. 97. 99. 100
Fervardin mah, III. 531
Feste, III. 553
Fester Cörper. Erklärung, II. 327. wie viel er sich eintauchet, 350
Festigkeit des Gebäudes. Erklärung, 284
wie sie zu beurtheilen, 286. wie sie zu beobachten, 309. 310
Festung. wie ihre Vollkommenheit zu beurtheilen, III. 83. wie sie abzustecken, 198
Feuer-Ballen, II. 63
Feuer-Kugeln. Erklärung, II. 63. Arten, 63. wie sie zubinden, 64. 65. und zu taufen, 65.
Feuer-Kugel-Zeug, II. 62
Feuer, wie dadurch Machinen zu bewegen, II. 316. 317
Feuer-Maure. Erklärung, 463. wie sie nicht rauchen, 463
Feuerwercker-Kunst, II. 8
Figuren. Eigenschafften, 118. Aehnlichkeit, 178. Grundlegung, 163. Ausrechnung, 204
Figuren des springenden Wassers, II. 407
Fische, III. 196. 242
Fisch. der fliegende, III. 242
der Südische, III. 242
Fixstern. Erklärung, III. 197. Bewegung, 247. Natur, 432. parallaxis, 350, 351
Fläche der Cörper. wie sie zu finden, IV. 313 314. wie sie Perspectivisch zu zeichnen, III. 119. wie ihre Abweichung von Süden,

den, Norden und dem Horizont zu finden, 569
Flanc, II. 100
Flanque. Erklärung, II. 100. ihre Lage, 106 Figur, 106. 107. 108 Zahl, 108. 109
Flecken in der Sonne/ III. 284. wie sie zu observiren, 288 in der *Venere*, III. 317 im Jupiter/ III. 317 in den Jupiters Monden, III. 322
Fliege/ III. 242
Fliegender Fisch/ III. 242
Flüßige Materie. Erklärung, II. 327. ihr wagerechter Stand, 330. ihr Druck, 333.
Flug/ II. 52
Fluß *Eridanus*, III. 242
Focus, IV. 189
Fomahant, III. 243
Fons Heronis, II. 420
Fortification. Erklärung, II. 83. Grund-Regeln, II. 84
Frieß. Erklärung, 316 Beschaffenheit, 322 Höhe, 334
Fronton. Erklärung, 379. Beschaffenheit, 380. Höhe, 381. Zeichnung, 381. 382
Frühling/ III. 488. 489
Fünf-Ecke. Erklärung, 113. wie seine Seite zu finden, IV. 107. wie es geometrisch zubeschreiben, 108
Fuhrmann/ III. 242
Fundamental-Linie/ III. 119
Futter-Mauren bey Festungen, II. 202
Fuß der Säule, 316 des Säulen-Stuhles, 315
Fußgesimse. Erklärung, 315. 316. wesentliche Glieder/ 325. andere Glieder, 326. Höhe, 333. Auslauffung, 334
Fuß-Mörser/ II. 52
Fuß-Riegel, II. 38

Gallerie, II. 221.222
Galiläanisches Fernglaß/ III. 88
Gebäude. Erklärung, 284. wie davon gründlich zu urtheilen, 284. Unterscheid, 284. wie seine Eintheilung zu finden, 424. 440. 441
Gebrochener Winckel. III. 11.
Gebälcke/ 314
Gedritt-Schein, III. 438
Gefälle des Wassers II. 293
Gefässe/ III. 242
Gekuppelte Säulen/ 163. 164
Geländer-Fenster, 415 416
Gelaleisches Jahr/ III 532
Gemach/ 425
Gemach-Thüre/ 417
Gemäßigte Striche Landes/ III. 486 487
Gemeine Bewegung, III. 195
Gemeines Jahr/ III. 526. 527
Gemini, III. 196
Gemma, III. 243
Geographie/ III. 475
Geometrie. Erklärung, I. 107. ihr Nutzen, 105. 106
Geometrische Cörper/ wie sie zu machē, 235. 236.
Linien/ IV. 132
Oerter/ IV. 209
Prögreßion. Erklärung/ 69. Eigenschafften, IV. 92. wie sie zu summiren, 94
Proportional-Zahlen. wie sie zu finden, 90
Verhältniß. Erklärung 67. Eigenschafften/ 69. 70. IV. 91
Gerade Ascension. Erklärung, III. 213. wie sie zu observiren, 213 233. 248. auf der Himmels-Kugel zu finden, 214. wie ihr Unterscheid zu finden, 232
Geradeläuffig/ III. 334

Geradelinichte Figur. Wie sie in Grund zu legen, 193. auszurechnen, 164. 204. zu theilen, 177
Geradelinichter *Transporteur*. Wie er zu verfertigen, 276. 277 und zu gebrauchen, 277.278
Gerade Linie Erklärung, 108. Wie sie beschrieben und gemessen wird, 108. 109 122. ihre Eigenschaften, 116.117. 118. und Theilung 146.182.183
Gerade Zahlen. Ihre Eigenschafften, IV. 64.65.66
Gesechst-Schein/III.438
Gesellschaffts-Rechnung, I.95.96
Geschlechte der algebraischen Linien, IV. 133
Geschliffene Gläser. Ihre Eigenschafften, III. 73. & seqq. IV.379
Geschütz-Kunst, II. 8
Geschwindigkeit, IV. 364
Gesichts-Linien/ II. 99
Gesimse, 328
Gesimse zu Fenstern und Thüren, 410
Gestelle zu Ferngläsern, III. 96
Gestirne, 242.243.244
Gesundes Auge. Wie es beschaffen, III. 16
Getrieb, II.234
Gevierdt-Schein, III. 438
Gewichte. Wie damit Machinen zu bewegen, II.313. 314. und Kräffte zu verstärcken/315. Unterscheid in den berühmten Städten, 350
Gewölbe. Erklärung, 435. Wie es aufzurichten, 436. Wiederlage, 437.438
Giebelfeld, 379
Giebel-Zinne 383
Gieß-Faß, II. 408.409
Ginbat, III. 530
Glacis, II.121. 122
Gläserne Feuchtigkeit/ III.12
Glaß. Wie man es

schleiffet, III. 115. 116. 117. Welches zum Schleiffen gut ist, 112 113
Glaß mit Wasser machet helle, III. 110
Gleichheit der Winckel, 118
Gleich-schenclichter Triangel. Erklärung 112. Eigenschafften, 141. 142. Beschreibung, 127
Gleichseitige Hyperbel. Erklärung, IV. 163 Nutzen, 344
Gleichseitiger Triangel. Erklärung, 112 Beschreibung, 127 Eigenschafft, 142
Gleichung, IV. 29
Glieder in der Bau-Kunst. Erklärung, 317. Regeln ihrer Zusammenfügung, 322. Proportion, 331
Glüende Kugel. Wie sie in ein Stücke zu laden, II. 45. Ihr Gebrauch, 46
Gnomonick. III. 567
Grab Christi, III. 243
Graben. Seine Nothwendigkeit, II. 92. Beschaffenheit, 114 115. Breite, 110. wie sie zu finden, 194
Grad, I. 111
Gränzen, III. 418
Granaten, II. 61
Gregorianischer Calender, III. 559
Gregorianisches Jahr, III. 527
Geegorianische Monathe, III. 528
Grösse. Erklärung, IV. 8. 9. Veränderungen, 10. Zeichen, 11 wie sie gesehen wird, III. 14 34. 35
Grösse der Bewegung, IV. 364
Grösstes, IV. 280. 281
Gröste Circul einer Kugel. Erklärung, III. 137. Eigenschafften, 138. 139. 140. 151 152. 159. 172
Gröste Conjunction, III. 439

Grosse *Conjunction*, III. 439
Grosser *Radius*, II. 102
Gründe der Rechen-Kunst, so willkühr-lich, 43. 71
Grund des Gebäudes. Erklärung, 387 Stär-cke, 387. Bau, 388
Gründbau des Gebäudes, 388
des Walles, II. 199 200
im Wasser, 397. 398
Grund-Graben, 393
Grund-Legung der Figuren, 193
Grund-Linie in der Perspectiv, III. 119
Grund-Maure, 392 393. 395. 396
Grund-Regeln der Fortification, II. 84
Grund-Riß eines Gebäudes. Erklärung, 467. wie er zu machen, 468
einer Festung, II. 135
Grundsätze, 17
Güldene Zahl. Erklärung, III. 143. wie sie zu finden, 543
Gyps-Decke, 434
Haar der *Berenices*, III. 242
Haase, III 242
Halb-*Caponieres*, II 124
Halbe Carthaune, II. 22 41. 50
Halbe Feld Schlange, II. 22. 41. 50
Halbe Redoute II. 190
Halber Mond. Erklärung, II. 117. Nutzen, 117. Zeichnung, 137 163
Halbmesser, 110
Halb-Schatten, III. 452
Halbes Falckonet, II. 22 41. 50
Hamle, III. 530
Hand-Faß mit einem Spring-Brunnen, II. 406
Handgranaten, II. 61
Hand-Mühlen, II. 311 312
Hangende Mörser, II. 52
Harmonische Proportion, 100
Harte Haut, III. 12

Haubitz, II.67
Haupt-Gegenden der Welt, III.187. 498
Haupts-Gesimse. Erklärung, 314. Höhe, 333 336
Haupt-Linie, II.102
Haupt-Riegel, II 38
Hauß-Thüre, 417. 418
Haziram, III. 533
Hebel. Erklärung, II. 232. Eigenschafft, 244. Nutzen, 232
Heber, II. 410. 411. 414
Heilige Drey Könige, III. 243
Heimliches Gemach, 443, 444
Heliocentrischer Ort, III. 390
Herbst, III. 488. 489
Herbstmonat, III. 528
Hercules, III. 242
Herd, 452. 453
Herons-Brunnen, II. 420
Hertze des Löwens, III. 243
Scorpions, III. 243
Hesperus, III. 317
Heumonat, III. 528
Hexaedrum, 242. 235
Himmels-Kugel, III. 181
Hexagonal-Zahl, IV. 78
Hitzige Striche Landes, III. 486. 487
Höhen. Wie sie zu messen, 190. 271. III. 25. 35. Wie weit man davon sehen kan, III. 483
Höhe des Gemaches. Wie sie zu finden, III. 423
des neuntzigsten. Wie sie zu finden, III. 369
der Sonne. Wie sie zu finden, III. 224 230
des springenden Wassers, II. 405
des Sternes. Erklärung, III. 199 wie sie zu messen, 201
des Triangels. Wie sie zu finden, IV. 112. 113
Hohe Ordnung, 335
Hohles Glaß. Erklärung, III. 73. Eigen-

genschafften, 82. 86. IV. 383
Hohl-Kehle. Erklärung, 318. Zeichnung, 319. Grösse, 332
Hohl-Leisten, 318
Hohl-Spiegel. Erklärung, III. 45. wie er zu machen, 57. Eigenschafft, 61. IV. 372
Holländische Fortification. Maximen, II. 125. Ausrechnung der Winckel und Linien, 126. Grund-Riß, 135. Profil, 134. Was davon zu halten, 142
Holländisches Fern-Glaß, III. 88
Holtz. Eigenschafften, 293. Warumb es in Gebäuden, so viel möglich, zu vermeiden, 293
Horizont, III. 185
Horizontal-Linie, II. 237. III. 119
Horizontal-Uhr. Erklärung, III. 571. Zeichnung, 574
Horn-Haut, III. 11
Hornung, III. 328
Hornwerck. Erklärung, II. 119. Zeichnung, 139
Humor aqueus, III. 12
crystallinus, III. 12. Eigenschafften, 13. 14. 15
vitreus, III. 12
Hund. Der grosse und kleine, III. 242
Hyades, III. 243
Hydar, III. 530
Hydra, III. 242
Hydraulick, II. 393
Hydrostatick, II. 327
Hydrus, III. 243
Hyperbel. Erklärung, IV. 152. 153. Beschreibung, 157. Asymptoten, 272. Eigenschafften zwischen den Asymptoten, 158. Quadratur, 304. Subtangens, 267. 268. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 166
Hyperbeln von höheren Geschlechten, IV. 163. 267
Hyperbolischer Affter-Regel, IV. 334

Hypotheſis, 22
Jacatit, III. 530
Jährliche Epacten/ III. 545
Jagt-Hunde, III. 244
Jahre der Gnaden, III. 550
Jahres Anfang, III. 529
Jahr-Termin. Erklärung, III. 537. Verſchiedene Arten, 550 551
Jahr-Zahlen. wie ſie mit einander zuvergleichen, III. 552
Jahr-Zahl der Märterer/ III. 551
Januarius, III. 528
Icoſaëdrum. Erklärung, 234. Netze, 236
Idus, III. 528. 529
Jenner/ III. 528
Jiar, III. 535
Immerwährender Calender/ III. 559
Inclination. Erklärung/ III. 384. wie die gröſte zu obſerviren, 387 wie die übrigen auszurechnen, 388
Inclination der monathlichen Gränze/ III. 412. 413
Inclinations-Winckel/ III. 11
Inclinirte Uhren/ III. 571
Indianer/ III. 242
Indianiſche Biene, III. 242
Innere Polygon, II. 102
Inſtrument die Mittags-Linie zu finden, III. 189. die Sole abzuwiegen/ II. 351
Inſuln im Mond, III. 306
Integral-Rechnung. Erklärung, IV. 292. Regeln, 293
Integriren, IV. 292
Intercolumnium, 364
Intervallum, III. 360
Inverſio rationum, IV. 89
Inwohner der Planeten, III. 329
Jomada, III. 535
Joniſche Ordnung. Er-

Erklärung/ 332. Glieder, 344
Irrational = Grösse, IV. 23
Irrational = Zahlen. Erklärung/ IV. 24. ihre Rechnung, 24 25. wie sie aus der Gleichung abzuschaffen, 183
Irreguläre Cörper/ 116
Irreguläre Figur. Erklärung, 114. Eigenschafft, 151. Beschreibung, 157. 158 Ausrechnung 164 Festung, II. 171 Platz. wie er zur Regularität zubringen. II. 172. wie er zu fortificiren, 174
Italiänische Stunden/ III. 516
Juden-Jahr, III. 535
Jüdische Stunden, III. 516
Jüdisches Sonnen-Jahr/ III. 536
Julianischer *Periodus*, III. 548. sein Nutzen, 549. 552
Julianisches Jahr, III 526
Julianische Monathe/ III. 528
Julius, III. 528
Jungfrau, III. 196. 242
Junius, III. 528
Jupiter/ III. 194. seine Flecken/ 318. Streiffen, 318. Bewegung umb die Axe, 319 und umb die Sonne/ 333. Aehnlichkeit mit dem Mond, 327
Jupiters-Monden, III. 320. ihre Bewegung, 321. Weite vom Jupiter, 321 Finsternisse, 321. 322. Flecken, 322
Jupiters Trabanten/ III. 324

Kälber-Zähne, 328 wie sie zu zeichnen, 359. wo sie nicht zu gebrauchen, 380
Kämpffer. Erklärung, 372. Glieder/ 372

Kalck

Kalck, von was vor Steinen er zu brennen, 305. 306. Proben, 307. Verwahrung, 307. 308
Kalte Striche Landes, III. 486. 487
Kammen. wie sie einzutheilen, II. 271. ihre beste Figur, 271
Kammer. wie sie beschaffen seyn sol, 426 438. 439. 440
Kammer im Mörser, II. 51
in der Mine. II. 73
amm-Rad. Erklärung, II. 234. wie es zu machen, 269
Kammer-Stücke, II 68
Kap-Fenster, 461
Karnieß. Erklärung, 316. wesentliche Glieder, 325. andere Glieder, 325. 326. Höhe, 334. Auslauffung, 334
Karterschen, II. 46. 47
Kegel. Erklärung, 114
Eigenschafften, 216 218. Ausrechnung, 218. 227
Kegelschnitte, IV. 164
Kehle, II. 111
Kehlleisten, 318
Kehl-Linie. Erklärung, II. 102. ihre Grösse, 111
Keil. Sein Vermögen, II. 283. Nutzen in der Artillerie, 48
Kern-Schuß, II. 50
Keßel, II. 51
Kirch-Thüre 417
Klappen zu Plumpen, II. 401
Klarer Begriff, 6
Kleine Axe in der Ellipsi, IV. 46
Defens-Linie, II. 101
Kleiner *Radius*, II. 102
der kleine Winckel, II. 103
ein Kleinstes, IV. 281
Kloben. Erklärung, II. 235. ihr Vermögen, 281. 282

Knall-Pulver, II. 18
Knauf, 316
Knorren. Erklärung, III. 384. wie sie zu observiren, 386. ihre Bewegung, 387. 398
Kohlen zu Pulver. Wie sie zu brennen, II. 11. 12. ihre Eigenschafften, 13. 14
Krafft, II. 230
Krafft, etwas unter dem Wasser zu erhalten/ II. 353
Kragsteine. Erklärung, 309. Gebrauch, 311. Zeichnung, 361. wo sie nicht zu brauchen, 380
Kranich, III. 242
Kranz, 316
Kranz-Leisten, 318
Kron-Werck. Erklärung, II. 120. Zeichnung, 139
Krebs/ III. 196. 242
Kriegs-Bau-Kunst/ II 83
Kripplein Christi / III. 243
Krone/ III. 242
Kropf-Felgen, II. 270
Krumme Linie/ 108
Küssen-Riegel/ II. 38
Kütt. Wie er zu machen, 431. II. 58. welcher zum Glaßschleiffen dienlich, III. 116
Kugel. Erklärung, 114
Eigenschafften, 114 221. 222. 223. 224. 228. IV. 126. Ausrechnung, I. 225. 226. IV 331. Erleuchtung, III. 21. wie das Licht darinnen gebrochen wird, III. 75. wie einer pfündigen Diameter gefunden wird, II. 26. wie ihre Gewichte zu vergleichen, 40. wie sie zu probiren, 44
Kugel-Circul, III. 139
Kugel-Lehre, II. 44
Kugel-Säcke. Wie sie zu machen, 63. 64
Lade-Schauffel, II. 40 41. 42
Ladung im Mörser, II. 59

in Stücken, II. 41
Länge eines Ortes, III. 485
eines Planetens. Wie sie zu observiren, III. 333. zu rechnen, 390
eines Sternes. Erklärung, III. 236 Wie sie zu finden, 237. zunimmet, 247. auf jede Zeit auszurechnen/ 248
des Tages. Wie sie zu finden, III. 219
Länglichte Raute, 113
Länglichtes Vierecke/ 113
Längster Tag. Wie seine Grösse zu finden, III. 495
Laffeten. Erklärung, 31. Zeichnung, 31
Laffeten der Mörser. Wie sie zu zeichnen, II. 54. 55
Lager im Mörser, II. 52
Land-Charten zu machen/ III. 505
Last/ II. 230
Lauff im Geschütze, II. 30
im Mörser, II. 51
Lebendige Krafft, II. 230
Lebendiger Schwefel/ II. 10
Lederne Stücke, II. 23
Leer-Bogen/ 437
Lehrsatz. Erklärung, 20. 21. Was dabey zu bedencken, 21. seine Theile, 21. 22. 23
Lens concava, III. 73
convexa, III. 72
Leo, III. 196
Leucht-Kugeln. Erklärung, II. 63. wie sie zu machen, II. 66
Leyer, III. 242
Libræ, III. 196
Licht. Erklärung, III. 7 Eigenschafften, III. 7 8. 9. 10. 11. 18. 19. 20 Warumb es von Weitem groß aussiehet/ 37. Wie es geschwächet, 83. verstärckt, 64. und gebrochen wird, 71

Licht des Monds. Wie es ab und zunimmet, III. 295. 296
des Mercurii. Wie es ab und zunimmet, III. 316
der *Veneris*. Wie es ab und zunimmet, 315
Ligne de defense fichante, II. 101
flanquante, II. 101
Linea apsidum, III. 360
directionis, II. 236
Linie im Maasse, 109
Linie in der Geometrie, 107
Geographie, III. 477
Linien an der Festung. Wie sie einander flanqviren, II. 104
Locus planus, IV. 210
solidus, IV. 210
Löwe, III. 196. 242
der kleine, III. 244
Logarithmische Grössen. Wie sie zu differentiiren, IV. 342
zu integriren, 347
Logarithmische Linie. Erklärung, IV. 170
171. Eigenschafften, 341. Qvadratur, 310. Subtangens, 279
Nutzen, 342. Cörper, so daraus erzeuget wird, 335
Logarithmus. Erklärung, 250. Erfinder, 249. Eigenschafften, 250. 251. 252. Ausrechnung, 253. & seqq. IV. 342. wie daraus die Zahl zu finden, 342. Wie grosser Zahlen Logarithmi zu finden, I. 259. Differential-Grösse davon, IV. 341
Luchs, III. 244
Lucifer, III. 317
Lufft. Erklärung, II. 362. Eigenschafften, 366. 379. schwächet das Licht, III. 20. Wie man sie zusammen drucket, II. 377. 378
Lufft umb den Mond, III. 307. 308
Lufft-Pumpe, II. 363
Maaß der Linien 109

des Winckels, 118.143
des sphärischen Winckels, III.139
Maaß-Stab. Die Ordnungen zu zeichnen, 383
Macedonisches Jahr, III. 534
Machine. Erklärung, 231. Wie sie auf allerhand Art zu bewegen, 307
Magabit, III.530
Mahler-Kunst. Ihr Grund, III. 34
Majazia, III. 530
Majus, III. 528
Marchesvan, III. 535
Mars, III. 194. Wie er durch Fern-Gläser observiret wird, 314. seine Streiffen, 318 Bewegung umb die Axe, 319. Aehnlichkeit mit dem Mond, 327. eigene Bewegung, 333
Martius, III. 528
Mascaam, III. 530
Materie, IV. 346
Mathematick. Ihr Nutzen, 30
Mathematische Lehr-Art. Erklärung, 5. wie weit sie sich erstrecket, 29. ihr Nutzen, 30
Maure. Erklärung, 387. Beschaffenheit 399. 400. Bau und verschiedene Arten, 401. 402. 421. 422
Maximen zu erfinden Wo sie anzutreffen, 35 36
May, III. 528
Mechanick II. 229
Mechanisch philosophiren, II. 231
Mecheir, III. 529
Media & extrema ratione secare, IV. 109. 110
Meere, im Mond, III. 306
Meer-Sand. Wie er im Bauen zugebrauchen, 853
Meher mah, III. 051
Mehr, IV. 11
Menschen im Mond, III. 310

in Planeten, III. 329
Menſis anomaliſticus, III. 400
Dracontícus, III, 399
Mercurius, III. 134. wie er durch Ferngläſer obſerviret wird, 313 316. Bewegung umb die Sonne, 317. 333 Parallaxis. 285. Aehnlichkeit mit dem Mond, 327. 328
Mercurius in Sole, III. 314
Meridianus. Erklärung, III. 184. 199. 478 wie der Unterſcheid der Meridianorum zu finden/ 298. 299
Mertz/ III. 528
Meſori, III. 529
Meſſen/ II. 361
Meß-Kette/ 123
Meß-Schnure, 123
Meß-Tiſchlein. ſein Gebrauch, 185
Metall. woraus es gemacht wird, II. 23
Verhältniß der Schweere/ II. 346
Methodus de maximis & minimis, IV. 281
tangentium inverſa, IV. 336
Mezanin/ 405
Milchſtraſſe, III. 244 245
Micrometrum, III. 310 311 312
Minen. Erklärung, II. 71. Beſchaffenheit, 71. 72. wie ſie anzulegen/ 70
Minute/ III. III. 515.
Mira, III. 433
Mittag/ III. 187. 192
Mittags-Circul/ III. 478
Mittags-Höhe. Erklärung, III. 199. wie ſie zu meſſen, 202. und auszurechnen, 211. Nutzen, 211
Mittags-Linie. Erklärung, III. 186. wie ſie zu finden, 188
Mittags-Uhren. Erklärung, III. 571. Zeichnung, 578
Mittelpunct des Circuls. Erklärung, 110

wie er zu finden, 149 206
der Hyperbel/ IV. 153
der Grösse, II. 237
der Schweere. Erklärung, II. 237. wie er zu finden, 248
Mitternacht, III. 187
Mitternachts-Uhr. Erklärung, III. 571 Zeichnung, 578
Mittlere Anomalie. Erklärung, III. 361 ihr Maaß, 361. wie sie zu finden, 368 Bewegung/ III. 361
Mittlerer Theil eines sphärischen Triangels, III. 141
Mittlere Zeit / III. 514
Modul. Erklärung, 332. Eintheilung/332. wie er zu finden / 335 für die oberen Säulen zu verjüngen, 384. 385
Mörser. Erklärung/ II 52. Materie/ 52 Theile, 52. Zeichnung, 53 Richtung / 59. Ladung, 59. wie weit er trägt/ 60. 61
Mörser zu Granaten, II. 62
Mörtel / wie er zubereitet wird, 398. 399
Mohren-Jahr/ III. 539
Monathliche *Æquation*, III. 407 Breite/ III. 414 Eccentricität/ III. 402 Epacten, III. 544
Monathliches Argument der Breite, III. 412 der Länge, III. 403 404
Monathliche Scrupel der Länge, III. 403 404
Mond. wie er durch Ferngläser erscheinet, III. 302. Natur und Beschaffenheit, 305. 306. Aehnlichkeit mit der Erde, III. 309. Bewegung um die Erde, 193. 336. Bewegung seiner Kno-

Knoten, 398. wie seine Berge zu messen, 428. Charte darüber, 429. seine Grösse, 423. und Weite von der Erde, 416
Mond-Charten, III. 429
Mond-Circul, III. 542
Grösse, 543
Monden-Jahr, III. 525
Monden-Monath, III. 524
Mond-Epacten, III. 544
Mond-Finsterniß. Erklärung, III. 298. Ursachen, 297. 298. Umbstände, 297. 299. 300. 440. Ausrechnung, 440. wie sie zu observiren, 451
Mordad mih, III. 531
Morgen, III. 187. wie diese Gegend zu finden, 192
Morgenröthe wie lange sie wehret, 268
Morgenstern, III. 317
Morgen-Uhren, III. 571. Zeichnung, 579
Motus latitudinis, III 399
librationis, III. 319
reflexionis, III. 349
Muhamedisches Jahr, III. 534
Muharram, III. 535
Muldengewölbe, 436
Multiplication. Erklärung, 39. Regeln für gantze Zahlen, 55. für Brüche, 74. für Buchstaben, IV 18. für Irrational-Zahlen, IV. 28. Zeichen, 12
Mundstücke, II. 30. 31
Muschel-Linie, IV. 167
Musteraka, III. 531
Nabe, II. 39
Nabonasserisches Jahr, III. 529. wie sein Anfang zu finden, 531
Nacht, III. 513
Nachts-Länge, wie sie zu finden, III 222
Nadir, III. 183
Nahase, III. 530

Nahesäulig, 366
Nahme der Verhältnis, 67
Nahmen der Zahlen, 43. 34
Natürlicher Tag, III. 513
Nebelichte Sterne, III 245
Nebengegenden, III 498
Neben-Pfeiler, 372
Nebenstreiche, II. 102
Neben-Winckel, 119 III. 140
Neigungs-Winckel, III. 11
Nenner eines Bruches, I. 71
Netzförmiges Häutlein, III. 12
Neumond, III. 296
Niedrige Ordnungen, 335
Nisan, III. 533. 535
Nodi. Erklärung, III. 384. Bewegung, 387 Ort, 387. wie sie zu observiren, 386
Nodus ascendens, III. 384
australis, III, ibid
borealis, ibid.
descendens, ibid
Nonæ, III. 528. 529
Norden, III. 498
Nordische Krone, III. 242
Nord-Pol, III. 182. 477
Normal-Linie, IV. 262
November, III. 528
Numerus polygonus, IV. 78

Obersaum, 318
Oberschlägtiges Wasser-Rad. Erklärung, 284. wie es zutheilen, 300. wie das Wasser darauf zu leiten, 297. wo es zu gebrauchen, 296
Objectiv-Glaß, III. 88
Obliquitas ecliptica, III. 209
Oblongum, 113
Occasus acronyctus, III. 259
cosmicus, III. 259
heliacus, III. 260. 262
Ochsen-Auge, III. 243
Octaedrum, 234. 235
Octante, III. 230
Octo-

October, III.528
Oefen. Wie sie zu verbessern, 446. wie mit einem zwey Zimmer zu heitzen, 451
Ohren, 436
Ohren-Gewölbe, ibid.
Olympias, III.551
Ophiuchus, III.242
Optick. Erklärung, III. 7. Nutzen, III.5
Opus rusticum, III.423
Oppositon, III. 438
Ordentliche Figur, 114
Ordentlicher Cörper, 116
Ordinate, IV. 131. ihre Verhältnis in der Parabel, 140. und Ellipsi, 148
Ordnung. Erklärung, 313. Ursprung, 312 330. Theile, 313 Zahl, 329. wie von ihnen zu urtheilen, 313. 314 wie sie zu erfinden, 328. und zu zeichnen, 356.357
Orillon, II.107
Orion, III. 242
Ort an dem Circul. Erklärung, IV. 210. wie er zu construiren, 219 an der *Ellipsi*. Erklärung, IV. 210. wie er zu construiren, 216
an einer geraden Linie. Erklärung, IV. 209. wie er zu construiren, 210 211
an einer Hyperbel. Erklärung, IV. 240. wie er zu construiren, 219
zwischen den Asymptoten, IV. 221
an einer Parabel. Erklärung, IV. 210 wie er zu construiren, 211
der Sonne. Wie er zu observiren, III. 211
des Bildes im Spiegel, III. 49. IV. 372
Ort, wo jede Sache gesehen wird, III. 41 42
Ortus acronyctus, III. 259

cosmicus, ibid.
heliacus, III. 260
262
Ostl III. 498
Oster-Fest. Wenn es zu feyren, III, 555. wie es auszurechnen, III. 555
Ouvrage a Cornes, II. 119
couronné, II. 120
P*Achon*, III. 529
Pagans Fortification. Maximen, II. 142. Rechnung der Winckel und Linien, 143. Zeichnung, 145
Pagomen, III. 530
Palilitium, III. 243
Pallisaden, II. 122
Pansterzeug, II. 301
Paophi, III. 529
Parabola. Erklärung, IV. 135. Eigenschafft, 136. Beschreibung, 136. 140. 286. 337. 338 360. Quadratur, 297 Rectification, 317. Subtangens, 263. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 164
Parabeln von höherem Geschlechte. Erklärung, IV. 133. Beschreibung, 138. 139. Eigenschafften, 143 Subtangens, 264. Quadratur, 297. Rectification, 264
Paraboliſcher Aſſter-Kegel, IV. 325. 331
Parallaxis. Erklärung, 275. Eigenschafften, 276. 277. 278
Parallaxis der Erd-Bahn. Erklärung, III. 392. wie sie zu finden, 391. 392
der Fixsterne, III. 350 351
Martis, III. 418
Mercurii, III. 285
der Sonne III. 418
Parallel-Circul, III. 481
Parallelepipedum. Erklärung, 115. Eigenschafften, 116. 210. 212 227. IV. 289. 290. Ausrechnung, 210. 211 Netze, 236

Pa-

Parallel-Linien. Erklärung, 114. Beschreibung, 134. Abstecknng auf dem Felde, 139 Eigenschafften, 134 135. 141
Parallel-Lineal. Structur und Gebrauch, 134. 137. 138
Parallelogramma. Erklärung, 114. Eigenschafften, 161. 173. 174 Theilung, 174. 205
Parameter, IV. 135. 144 152
Partial-Finsternis. Erklärung, III. 446 wie ihre Grösse zu finden, 446
Particula exsors, III. 405 406
Paternoster-Werck, II. 395
Panni, III. 529
Pegasus, III. 242
Pentagonal-Zahl, IV 78
Perigæum, III. 360
Peribelium, ibid.
Periodischer Monat, III. 395
Periodus Juliana, III. 548
Perpendicul an Uhr-Wercken, II. 320. 321
Perpendicular-Linie. Erklärung, 111. Beschreibung, 135. 136. 145
Perser-Jahr, III. 531
Perseus, III. 242
Perspectiv, III. 118
Perspectivische Risse, 470
Petardel, II. 68. 69
Petrus, III. 243
Pfähle. Wie sie zum Grund-Baue beschaffen seyn sollen, 390. 391. was bey dem einrammen in Acht zu nehmen, 391 392. 394
Pfau, III. 242
Pfeil, ibid.
Pfeiler, 309. wie sie ins Perspectiv zu bringen, III. 124
Pflaster. Was für Figuren der Steine sich dazu schicken, 427. 428
Pflaster-Ziegel, 427
Pfühl, 318

Phamenoth, III. 529
Pharmuthi, ibid.
Phœnix, III. 242
Phosphorus, III. 317
Pilastel 309
Pisces, III. 196
Places d' armes, II. 165
Plagæ, III. 498
Planete, Erklärung, III. 197. Bewegung durch den Thier-Kreiß, 334 335. 375. wie die Eccentricität nebst dem Aphelio gefunden wird, 379. wie ihre Grösse zu finden, 424 Inwohner, 329. ihre Natur, 327. 328 Verdeckungen unter einander, 329. scheinbahre Diameter, 331 332. Weite von der Sonne, 369. und von der Erde, 421. 391. 330. Warumb sie stille stehen und zurücke gehen, 347. 348.
Planeten umb die Fixsterne, III. 433
Planeten-Stunden, III. 516.
Platten. Erklärung, 317
Grösse, 332
Platter Spiegel Erklärung, III. 45. wie er zu machen, 46. 47 Eigenschafften, 49 IV. 373
Plättlein. Erklärung, 317. Grösse. 332
Plejades, III. 243
Plumpe, II. 399. 400
Plump-Stock, II. 399.
Polar-Circul, III. 198.
Polar-Uhren. Erklärung, III. 571. Zeichnung, 581
Pol der Kugel, III. 139.
Pole der Ecliptick, III. 209.
Pol-Höhe. Wie sie zu finden, III. 203. 207 210
Pollux, III. 243
Polus antarcticus, III. 182.
arcticus, ibid.
Polygonal-Zahl. Erklärung, IV. 78. wie sie zu finden, 80.

Polygone 113
Polygon-Winckel, 103
Polyhedrische Gläser / III. 111
Polygonische Wurtzel / IV. 43
Polyoptrische Gläser, III. 111
Postement. Erklärung, 314. Beschaffenheit, 327. 375. Höhe, 333 Eintheilung, 336 Gebrauch, 314. 315
Postement-Gesimse. Erklärung, 315. Wesentliche Glieder, 325 andere Glieder, 325 326. Höhe, 333. Auslauffung, 334
Postulata, 17
Potagen-Heerd. Wie er zu bauen / 453
Potentz. Erklärung, IV. 20. Grade, 20. 21 Zeichen, 21. Rechnung, 21. 22
Præsepe, III. 243
Prisma. Erklärung, 114 Eigenschafft, 115. 210 217. 227. Ausrechnung, 212. Netze / 236 237
Profil, II. 140. Zeichnung, II. 140. 141. wie sein Superficial-Inhalt zu finden, 191 wie der cörperliche zu finden, 195
Progressio arithmeticæ, 69. Eigenschafften, IV. 68 *geometrica*, 69. IV 92
Proportio continua. Erklärung, 68. Eigenschafften, 87. 88. IV 86
Proportion. Erklärung, 68. Zeichen, 68 Eigenschafften, 187 III. 164. 165. IV. 85. 89
Proportional-Linien. Wie sie zu finden, 180. 181. IV. 228
Proportional-Zahlen. 88. 90
Prosthaphæreses, III. 363
Pultdach, 460
Pulver. Wie es gemacht wird, II. 15.

17. Ursachen der Würckung, 15. Sätze, 16. womit es anzufeuchten, 16,17. wie es reissend wird, 17 wie man es probiret/ 18. 19. 20. 21. wozu es Anlaß gegeben, 8
Pulver-Mühlen, II. 17
Pulver-Sätze, II. 16
Punct. Erklärung/ 107 Warumb er untheilbahr, 107. 108
Puncta flexus contrarii, IV. 352
Pupilla, III. 12. 17, 18
Pycnostylon, 366
Pyramide. Erklärung, 116. Eigenschafft, 116 215. 216. 218. 227. Ausrechnung, 218. Netze, 237
Pyrobologia, II. 8
Pyrotechnia, ib.
Quadrat. Erklärung, 112. Beschreibung/ 155 173. Eigenschafften, 157. Ausmessung, 158, 159 wie es ins Perspectiv zu bringen, III. 121
Quadratische Gleichung. Erklärung, IV. 46. wie sie aufzulösen, 46. Exempel, 47. 48
Quadrat-Linie. 159
Quadrat-Maaß, 159 160
Quadratrix, IV. 170
Quadrat-Ruthe, 159
Quadrat-Schuhe, ib.
Quadratur des Circuls, IV. 305 der krummen Linien, IV. 295
Quadratus, III. 438
Quadrat-Wurtzel. Erklärung, 76. wie sie gefunden wird, 78. IV. 44. ihr Logarithmus, I. 251
Quadrat-Zahl. Erklärung, 76. IV. 78 wie sie entstehet, I. 77 78. IV. 43. 44. 45. Eigenschafften/ 199. ihr Logarithmus, I. 250 ihre Differentien, IV. 61

Qvadrat-Zoll, 159
Qvartier-Feld-Schlange, II. 22. 41. 50
Rabe, III. 242
Rabia, III. 535
Rad an einer Axe, II. 233
Radelinie, IV. 171
Radius des Circuls / 110 117. 244
der Evolute, IV. 359
Räder der Laffeten. Wie sie zu zeichnen, 39
in der Mechanick. Wie sie zu berechnen, II. 266
Räder-Werck ohne Kammen, II. 274
Rajab, III. 535
Ramadan, ibid.
Rarsäulig, 366
Rasen, II. 201
Ravelin. Erklärung, II. 117. Nutzen, 117 Zeichnung, 137. 146 163
Raute, 113
Rechenkunst. Erklärung, 85. wie sie abzuhandeln, 85
Rechnungs-Arten. Ihr Ursprung, 37. 38. ihre Anzahl / 39 Nahmen und Erklärungen, 39
Rechter Winckel / 112 144
Rechtwincklichter Triangel. Erklärung, 112. Eigenschafften, 137. 172. IV. 115. 117 124. 239. 249. wie sein Inhalt zu finden, IV. 110
Rectangulum. Erklärung, 110. Beschreibung, 156. Eigenschafft, 157. Ausrechnung, 160
Rectification der krummen Linien. IV. 316
Regel / III. 243
Regel Detri, 90
Redoute. Erklärung, II. 185. Grund-Riß / 187. Profil / 188
Reduction zur Ecliptik, III. 385. 388
Reflexion. Erklärung, III. 9. Gesetze, 9. 10 IV. 370

Re-

Reflexions-Winckel, III. 9
Refraction, Erklärung, III. 10. Gesetze, IV 377. wie ihre Grösse zu observiren, III. 70 71
Refraction der Sonne, III. 279. 280. 281
Refractions-Winckel, III. 10
Refringirter Winckel, III. 11
Regel *de quinque*, 94 95
Regiment-Stücke, II. 22. 41. 50
Reguläre Festungen, II. 171
Reguläre Figur. Erklärung, I. 114. Eigenschafften, 147. 148. 150. 166. Beschreibung, 153. 154. Ausrechnung, 165
Reguläre Cörper. Erklärung, 116. Anzahl, 233. Netze, 235
Regulärer Dreyecke. wie seine Seite sich zum Diameter des umbschriebenen Circuls verhält, IV. 103
Reguläres Viereck, wie es zubeschreiben, 153. 154. Ob Renaldinus es richtig zu beschreiben angewiesen, IV. 125
Regula composita, 94 95
Societatis, 95. 96
Regulus. III. 243
Reißbret, 354
Reißkohlen, 12
Reißschiene, 354. 355
Retrogradus, III. 334
Rhombus. Erklärung, 113. Beschreibung, 156. Eigenschafft, 157 Ausrechnung, 162
Riemlein, 318
Rimleisten, 318
Ring umb den Mond in der Sonnen-Finsternis, III. 294 295
Ring umb den ♄, III. 326
Röhre, II. 393
Röhren zu Fern-Gläsern, III. 88. 89
Römer Zinß-Zahl. Erklä-

klärung, III. 547. wie sie zu finden, 548
Römische Ordnung, 331. 346
Römischer Calender/ III. 528
Rolle, 238
Romanische Treppe, 457
Roß-Mühlen, II. 309 310
Rost zum Grundbaue, 394. 395
Rückgängig, III. 334
Ruhe-Punct, II. 235
Ruhe-Riegel, II. 38
Ruthe. Erklärung, 109
Zeichen, 111
Sal. Wie er beschaffen seyn sol/ 426. 438. 439. 440
Sächsische Raute, III. 244
Säule. Erklärung, 309 314. Wie sie zu proportioniren, 311. 312 Höhe, 333. Wie sie zu verdünnen, 312. 362 Wie eine über die andere zu stellen, 383 ihr Rang, 338
Säulen-Laube, 364
Säulen-Stellung / 314
Säulen-Stuhl, ibid.
Säulen-Weite. Erklärung, 364. Grösse, 365 366. 367. was dabey in acht zu nehmen, 366. 367. 368
Salpeter. Wie er zu läutern, II. 9. woher er kommet, 9. Eigenschafften, 12. 13. 14
Sand. Wie er beschaffen seyn sol, 304. Probe, 304. 305. Arten, 305
Sapphiren, II. 219. 220.
Satellites Jovis, III. 320
Saturnus, III. 194. seine Gestalten, die man durch das Fern-Glaß observiret, 325. 326 Aehnlichkeit mit dem Mond, 327. Bewegung umb die Sonne, 333
Saturnus-Monden/ III 324. 325
Satz zu Feuer- Kugel-Zeug, II, 62
Schafft. Erklärung, 316

316. Beschaffenheit, 322. 232. wesentliche Glieder/325. Höhe, 334
Schaffrgesimse. Erklärung/316. wesentliche Glieder, 325. andere Glieder, 326. Höhe, 334. Auslauffung, 334
Schalt-Jahr, III. 525 526 527
Schalt-Tag, III. 525. 528
Schantz-Körbe, II. 203
Scharivar mah, III. 531
Schatten. Erklärung, III. 7. Eigenschafften, 7. 12. 23. 24. wie seine Länge zu finden, 21. 24 26. wie dadurch die Höhen zu messen, 25 seine Figur, 26. 27. 28 wie er perspectivisch zu zeichnen, 128
Schatten der Berge im Mond, III. 306 373
Scheere. Erklärung, II. 118. 119. Zeichnung/ II. 138. 139
Scheibe des Klobens, II. 235
Scheinbahre Grösse. Erklärung, III. 35. wie sie zu finden, 36
Scheinbahre Horizontal-Linie, II. 238
Scheinbahrer Diameter der Sterne, III. 330. 331
Scheinbahrer Horizont, III. 186
Scheinbahre Zeit, III. 514
Scheitel/ IV. 132
Schemmel-Mörser, II. 52
Schiefe Ascension. Erklärung, III. 214. wie sie zu finden/ 215. 216
Schiefe der Ecliptick/ III, 209
Schiefe Descension/ III. 214
Schiefliegende Fläche/ III. 235. 275. 276. 585
Schieß-Scharten, II. 202
Schiff Jasons, III. 242
Schlange, II. 21. 22. 41 50. III. 242

Schlangen-Mann, III. 242
Schluß-Stein, wie er zu zeichnen, 379
Schnell-Wage, II. 253 254
Schnörckel, 328. Zeichnung, 359
Schönheit. Erklärung, 285. wie sie zu erkennen, 285
Schönsäulig, 366
Schöpff-Rad, II. 397
Schöpf-Werck, II. 396
Schorstein, 463
Schrancken der Wurtzeln in Gleichungen, IV. 187
Schraube. Erklärung, II. 235. ihr Vermögen, 277. ihre Eintheilung, 278. 279
Schraube-Mutter, II. 235
Schraube ohne Ende, II. 280
Schrifft. wie sie auszulegen, III. 342. 343
Schüsseln zum Glaßschleiffen, III. 13. 14
Schütze, III. 196. 242
Schüsse eines Stückes, wie weit sie gehen, II. 49
Schuhe. Erklärung, 109. Zeichen, 111
Schulter-Winckel, II. 103
Schwan. III. 242 244
Schwantz-Riegel, II. 38
Schwartze Haut, III 12
Schweere. Erklärung, II. 238. ist unter dem Æquatore kleiner als gegen die Pole, III. 349. 350
Schweere der Cörper in flüßiger Materie, II. 335. 349
der Lufft, II. 367 370
der Metalle und anderer Cörper, II. 346
Schwefel. Wie er zu läutern, II. 9. 10
welcher zum Pulver am

am besten, 10. wozu er dienet, 10. Eigenschafften, 11. 13. 14
Schweif der Cometen. Was er sey, III. 437
Schwung-Räder, II. 320. 321
Sclerotica, III. 12
Scorpion, III. 196. 242
Scorpius, III. 196
Scrupel der Breite, III. 412. 413. 414
der Wahre, III. 447. 448. 465
der Versinsterung, III. 445. 446. 464
Secans. Erklärung. 244
Ausrechnung, 248
Logarithmus, 260. 261
Sechsecke. Erklärung, 113. Eigenschafft, 154
Beschreibung, 155
Second flanc, II. 102
Sectio divina, IV. 110
Sector. Eigenschafft, 166. Ausrechnung, 171
Secunde, III. III. 515. Wie sie in Trigonometrischen Rechnungen zu finden, I. 264
Secundirende Linie, II. 88
Seele eines Stückes, II. 30. 32. 33
Sehne, 110
im Circul, 147
in der Parabel, IV. 141
Seite der Polygonal-Zahl. Erklärung, IV 79. wie sie zu finden, 82
Semidiameter, 110
Semiordinate, IV. 131
Senckrechte Linie, 111
September, III. 528
Serpentinel, II. 22. 41. 50
Setzer, II. 43
Setz-Kolben, ibid.
Sextilis, III. 438
Shaaban, III 535
Shabat, III. 533
Shawall, III. 535
Shebat, ibid.
Sicherpfahl, II. 306
Sichtbahre Bewegung des ☽ von der ☉, III. 459. 460
Breite des ☽, III 464

Sin-

Finsterniß/ III. 292
Länge des ☽, III 454
Zusammenkunfft, III 460
Sidera Medicæa 320
Urbanoctaviana, III 324
Siebengestirn/ III. 243
Siegelwachs. wie es zu machen, III. 116
Sinus. Erklärung, 243 Eigenschafften, 243 244. 261. Ausrechnung, 245. Gebrauch, 262. IV. 323. wie besonders der von 18°, IV. 109, der von 22° 30′ 105. der von 60°, 104. und eines vielfachen Bogens zu finden/ 118. wie ihre logarithmi zu suchen, I. 257. wie aus ihnen die Bogen zu finden, IV. 324
Sinus artificialis, III. 147
complementi, 244 245
totus, 244. 245
versus, 244. IV. 327
Sivan, III. 535
Solstitium. wie es zu observiren, III. 303
Sommer, III. 488. 489
Sonne. Ihre Flecken, III. 283. Natur, 283 Figur, 287. Bewegung umb die Axe, 287. Bewegung durch den Thierkreiß, 192 194. 358. ob sie sich umb die Erde beweget, 342. 344. ihre Excentricität, 363 wie sie die Fläche bescheinet, 568. 569. ihre Weite von der Erde, 416. ihre Größe, 427
Sonnen-Circul. Erklärung, III. 539 Grösse, 540. wie er zu finden, 541
Sonnen-Finsterniß. Erklärung, III. 392 Umbstände und Beschaffenheit/ 290. 293 294. 295. Ursache, 291. 292. 307. wo sie gesehen wird, 453 wenn sie sich ereignet,

454. wie sie ausgerechnet, 455. und observiret wird, 469
Sonnen-Jahr. III. 524. wie seine Grösse zu finden, 356
Sonnen-Monath, III 523
Sonnen-Stunden, III 217
Sonnen-Uhr, III. 567
Sonntage. Auf welche Tage im Jahre sie fallen, III. 542
Sonntags-Buchstaben. Erklärung, III 522. wie er zu finden, 541
Sophar, III. 535
Sphæra obliqua, III. 494
parallela, III. 492
recta, III. 491
Sphærica, III. 179
Sphärische Spiegel, III. 45
Sphärischer Triangel, Erklärung, III. 137
Eigenschafften, 141 143. 144
Sphärische Trigonometrie, III. 137
Sphärischer Winckel, III. 138
Spica virginis, III. 243
Spiegel. Erklärung, III. 45. Eigenschafften, IV. 371
Spiegel-Gewölbe, I. 436
Spiel-Raum. Erklärung, II. 24. wie er zu finden, 24. sein Nutzen, 25
Spindel, II. 235
Spiral-Linie. Erklärung, IV. 172. Subtangens, 273. Quadratur, 310
Spiral-Linien von unendlichen Geschlechten. Erklärung, IV. 172. Subtangens, 275. 276
Quadratur 311. 312. 313
Spitziger Winckel, 112 144
Spitzwincklichter Triangel. 112
Springbrunnen durch den Fall, II. 404
durch Heber, 416

durch

durch die Wärme, 420. durch die Lufft/ 411
Springbrunnen / der unterweilen aufhöret, II. 412
Stab. Erklärung, 318 Zeichnung, 318. Gröſſe, 332
Stäblein, 318
Staberzeug / II. 301
Stadt-Thor/ 417
Stärcke der Linie, II. 88
Stamm, 316
Stampffer, II. 43
Stangen-Zirckel, 110
Stationarius, III. 334
Stechheber, II. 409
Stehende Mörser/ II. 52
Steine. Wie ihre Güte zu erforschen, 299 wenn sie sollen gebrochen werden, 300 wie man sie oeltränket, 431. wie sie im Grundbaue zu legen, 397
Steinbock, III. 196. 242
Stein-Carthaunen / II 68
Stein-Galle/ 299
Steinhauen. wie es beschaffen. 436
Steinklippen im Mond, III. 306
Stein-Stücke, II. 68
Stell-Riegel / II. 38
Stengel/ 328
Stern. Wie lange er über dem Horizont bleibet, III. 249. wenn er in Meridianum kommet, 250. 254. wie er darinnen zu observiren, 253. weñ er auf und untergehet, 252. mit welchem Puncte der Ecliptick er aufgehet, 255 256. 258. wenn er mit der Sonnen untergehet, 259. wenn er sich unter die Sonnen-Strahlen verbirget und wieder heraus rücket, 262. welche niemahls auf und die niemahls un-

tergehen, 254. 255.
ihre scheinbahre Grösse, 245. ihre Anzahl, 242. 245. Weite von der Erde und Natur, 432. besondere Nahmen derselben, 243
Stern im Auge, III. 12
Stern-Rad, II. 234
Stern-Schantze, Erklärung, II. 185.
Grund-Riß, 189
Stiefel im Druckwercke, II. 401
Stillstand eines schweeren Cörpers, II. 238 239. 241. 243
der Planeten, III. 334
Stier, III. 196. 242
Stinckende Augeln, II. 63
Stirn-Rad, II. 343 269
Stock-Panster, II. 302
Stoß im Mörser, II. 51
Straub-Zeug, II. 301
Streiche, II. 100
Streichende Defens-Linie, II. 101
Streich-Winckel, II. 103
Streiffen, 318
Stuben. wie sie beschaffen seyn sollen, 426. 438 439. 440
Stücke. Erklärung, II. 21. Arten, 22. Materie, 23. Theile, 30 31. Beschaffenheit, 31. Ladung, 45. Richtung, 47. 48. Länge, 34. Zeichnung, 135
Stückgiessen, II. 23
Stück-Pulver, II. 19
Stütze. Erklärung, 309. Gebrauch, 310 Beschaffenheit, 311 312
Stumpffer Winckel, 112. 144
Stumpfwincklichter Triangel, 112
Stunde. Erklärung, III. 515. Arten, 515 wie sie mit einander zuvergleichen, 517
Stunde der ersten Bewegung, III. 77
Stuffen auf der Treppe. Wie sie seyn sollen, 455

Sturtz-Rinne/ 318
Subnormal-Linie.
Erklärung IV. 262
wie sie zu finden, 269
Subtangens. Erklärung, IV. 262. wie sie zu finden, 262
Subtrahiren. Erklärung, 39. Regeln für gantze Zahlen, 40
für gebrochene 73
für Buchstaben, IV 15. 16. für Irrational-Zahlen, 27. Zeichen, I. 53. IV. 11
Süden/ III. 498
Süder Pol/ III. 182. 477
Südische Krone, III 242
Summe 39
Summiren/ IV. 292
Summirende Zahlen/ 39
Syllogismus. Nutzen in der Mathematick, 26. 27
Symmetrie, 292
Syne, III. 350
Synodischer Monath, III. 395
Syrisches Jahr, III. 532
Systema mundi Copernicanum, III. 344
Tychonicum, III. 337
Systylon, 366
Tabulæ æquationum, III. 371
curtationum, III. 389
inclinationum, III. 388 389
latitudinum & longitudinum, III. 241
motus latitudinis, III. 399
motuum mediorum, III. 371
reductionum, III. 389
sinuum & tangentium, 245
Tag. Erklärung, III. 513
Wenn er die gantze Nacht durchschimmert, 263. 264. 265
Wie er ab und zunimmet, 489. wie lang er währet III. 219
Tage-Circul, III. 187
Tages-Anbruch. Erklärung, III. 262. Ursache,

sache, 263. 264. wie er auszurechnen, 265 266
Talud, II. 95
Tamuz, III. 533. 535
Tangens. Erklärung, 244. Ausrechnung, 248. Gebrauch, 265 267. Logarithmus, 260. Eigenschafften, 242. Wie daraus der Bogen zu finden, IV. 322
Tangens des vielfachen Winckels. Wie er zu finden, IV. 121
der krummen Linien. Erklärung, IV 261. wie er zu finden, 262
Tauffe der Feuer-Kugeln, II. 65
Taurus, III. 96
Tebeth, III. 535
Tekuphæ, III. 536
Tenaille simple, II. 118
double, II. 119
Terreplain, II. 95
Tetraedrum. Erklärung, 234. Netze, 235
Theilung der geraden Linie, 146
Theorema, 20
Theorema Pythagoricum, 172. 173
Theorica, III. 179
Thermometra concordantia, II. 384
Thermometrum, II. 380
Thermoscopium, ibid.
Thesis, 22
Thier-Kreiß, III. 197
Thor an einer Festung, II. 204
Thot, III. 529
Thüre. Erklärung, 417. Breite und Höhe, 417. Figur, 418. Wie sie ins Perspectiv zubringen, III. 119
Thüre, die spritzet, wenn man durchgehet, II. 406
Thür-Schwellen, 418
Tiefe der Sonne, wenn der Tag anbricht, III. 263. wie sie zu finden, 269
Tishrin, III. 533. 535
Todte Krafft, II. 230

Tonnen-Gewölbe, 435
Torricellianische Röhre, II. 374
Toucan, III. 242
Total-Finsternis, III. 446
Transcendentische Linien, IV. 132
Transporteur, III
Trapezium. Erklärung, 113. Wie es zu theilen, 175
Traversen. Erklärung, II. 122. Nutzen. 122 123. Zeichnung, 166
Trenchëen, II. 210
Treppe. Erklärung, 454 Beschaffenheit, 454 455. 456. Zeichnung, 458
Triangel. Erklärung, 112. Eigenschafften, 125. 137. 139. 140. 161 162. 172. 179. 180. 181 III. 242. IV. 122. Beschreibung, I. 127. 129 Ausrechnung, 163. IV 296. Theilung, I. 205 wie er ins Perspectiv zu bringen, III. 119. 120
Triangel. der südische, III. 242
der nordische, ibid.
Triangular-Zahl, IV 78
Triangulum æquatorium, III. 363
æquilaterum, 112
æquicrurum, ibid.
Scalenum, ibid.
Triglyphen, 357
Trigonometrie. Erklärung, 243. Nutzen, 241. 242
Trigonus, III. 438
Trillings-Stöcken, II. 271
Trinomische Wurtzel, IV. 43
Trompeter-Gänglein, 415. 416
Tropicus cancri, III. 477
capricorni, III. 198
Trilling, II. 234. 272
Tünchen, 421. 422
Tuscanische Ordnung. Erklärung, 331. Glieder, 337
Tybi, III. 529
Tykymt, III. 530
Tyr, III. 530. 531

Tyshas, III. 530
Variation, III. 410
411
Vaubanische Fortification. Maximen, II 157. Ausrechnung der Linien, 157. Grund-Riß, 160. Profil, 162
Werth, 167
verstärckte Manier. Maximen / 167
Grund-Riß, 168
Werth, 169
Veadar, III. 535
Uberschlag, 318
Vectis homodromus, II. 259
heterodromus, ibid.
Ventil / III. 194
Venus / III. 194. ihre Aehnlichkeit mit dem Mond, 327. Flecken, 318. Berge, 317. Bewegung umb die Axe, III. 319. umb die Sonne, 315. 333
Venus in Sole, III. 314
Veränderliche Grösse. Erklärung, IV. 255
Zeichen, 256
Verbürste Circul / 435
Verdeckter Weg, II. 121
Verdruckte Circul, 455
Verdünnung der Säulen, 312
Vergrösserungs-Gläser, III. 84. 85. 106. wie viel sie vergrössern, 104. 105
Verhältnis, 67. ihre Veränderungen, IV 89. 91. welche in der Bau-Kunst zu gebrauchen / I. 289. 290
Verhältnis der Irrational-Grössen, IV 26
Verjüngter Maaß-Stab, 123. 183. 185
Verkleinerungs-Gläser, III. 86. 87
Verkehrte Regel Detri, 93. 94
Verkehrter Karnieß, 320
Vertical-Circul, III. 199
Vertical-Uhren, III. 571
Vertical-Winckel, 119
120. III. 140
Vielecke, 113

Vieleckichtes Glaß, III. 111
Viertel des Monds, III 296
Viertel-Feld-Schlange, II. 22. 41. 50
Viertel-Feld-Stücke / ibid.
Viertel-Stab. Erklärung, 318. Zeichnung, 319. Grösse, 332
Vindemiatrix, III. 243
Virgo, III. 196
Visir-Schuß / II. 50
Visir-Stab, 228. 230
Unbewegliche Feste / 553. 554
Underterminirte Aufgabe, IV. 30. Exempel dazu, 197
Undeutlicher Begriff. Erklärung, 7. wenn man mit ihm zufrieden seyn kan, 8
Unendlich kleine Grösse / IV. 253. 254
Unförmige Sterne, III. 244
Ungerade Zahlen. Ihre Eigenschafften, IV 64. 65. 66
Ungleichseitiger Triangel, 112
Unordentliche Figur, 114
Unordentlicher Cörper, 116
Unter-Balcken, 316
Untergang der Sterne / III. 136. 252
der Sonne / III. 222
Unsichtbahr. Warumb einige Sachen werden, III. 14. 15
Unsichtbahre Finsternis, III. 292
Untersaum / 318
Unterscheid, 39
Unterschlägtiges Wasser-Rad. Erklärung, II. 28. wo es zu gebrauchen, 296. wie das Wasser darauf zu leiten, 303
Unveränderliche Grösse. Erklärung, IV 255. Zeichen, 256
Unvollständiger Begriff / 7
Voll-Erde / III. 431
Vollmond, III. 296

Vollkommenheit einer Festung/ II. 83
eines Gebäudes, 285
Vollständiger Begrif/7
Vorgebürge im Mond/ III. 306
Vorgemächer. Wie sie beschaffen seyn sollen, 426
Vorstechung, 315
Wende. Wie sie ins Perspectiv zu bringen, III. 124
Wärme. Wie sie bald ins Zimmer dringet, 446
Wässerige Feuchtigkeit, III. 12
Waffen-Plätze, II. 165
Wage. Erklärung, II. 248. wie sie zu machen, 348. zu probiren, 349
Wage/ III. 196. 242
Wahre Bewegung, III. 361
Wahrer Horizont, III. 185
Wahre Wurzel, IV. 172
Wall. Seine Nothwendigkeit, II 92. Höhe, 96. 97. Figur/98 101. wie er aufzuführen, 200
Wallfisch, III. 242
Wallgang, II. 95
Waltze/ 114
Wand-Pfeiler/ 309
Wand-Säule, idid.
Wasser. Wie es zu Bewegung der Mühlen gebraucht wird, II. 285
Wasserkunst, II. 402. 403
Wasser-Schlange, III. 242. 243
Wasser-Mann, III. 196. 242
Wasser-Schraube, II. 393
Wasser-Stand/ II. 296
Wasser-wägen/ II. 286. 293
Wasser-Wage, II. 289
Wehr-Bau/ II. 305
Weinmonat/ III. 528
Weiten der Oerter. Wie sie zu messen, 130. 132. 133. 185. 274. 275. III. 479. 504
der Planeten von der Erde, 421. 391. 394
von der Sonne. III. 369. 393
der

der Sterne. Erklärung, III. 230. wie sie zu observiren, 230. 231. Nutzen, 232

Weitsäulig, 366

Welsche *Practica*, 98

Welt. Wie sie ausstehet, III. 180. 181

Welt-Axe, III. 181

Welt-Gebäude. Wie es beschaffen, III. 344

Welt-Gegenden, III. 498. 500

Welt-Kugel, III. 181

Welt-Pole, III. 182

Wendel-Treppe. Erklärung, 457. Beschaffenheit, ib. Zeichnung, 58

Wendungs-Punct. Erklärung, IV. 352. wie er zu finden, 354

Weniger, IV. 11

Wesentliche Glieder, 325

Wetter-Glaß. Wie es zu machen, II. 380

Besondere phænomena, 382. 383

Widder, III. 196. 242

Wiederkehrungs-Punct. Erklärung, IV. 352. Wie er zu finden, 354

Wiederlage der Gewölber, 437. 438

Wiederstand in Bewegung der Machinen, II. 317

Wiederstehende Krafft, II. 328

Winckel. Erklärung, III. Maaß, III. Eigenschafften, 118. 119. 139 140 144. Wie er zu messen, 121. zu beschreiben, 124. auf dem Felde abzustecken, 131. Theilung in zwey Theile, 149

Winckel in reguliren Vielecken, 150

in jedem Vielcke, 151

Winckel, der allzuspitzig. Wie er zu fortificiren, II. 181

der einwarts gebogen. Wie er zu fortificiren, ibid.

Win-

Winckel an der Peripherie/ 143. 144
an der Sonne, III. 363 390
Winckelhacken, 136 144
Winckelmesser/ 111
Wind, II. 25
Wind-Mühlen, II. 207 308
Wind-Raum, II. 24
Wind-Wage. Erklärung, II. 363. Wie sie zu machen, 385 und zu gebrauchen, 387. 388
Winter, III. 488. 489
Wintermonat, III. 528
Wischer, II. 43
Wischkolben, ibid.
Woche, III. 522
Wolff, III. 242
Wohlgereimtheit, 291
Würffel, 115
Würffel in der Bau-Kunst. Erklärung, 315. Beschaffenheit, 322. 323. Höhe/ 333 Auslauffung, 334
Wulst, 318
der Wunderbahre Stern, III. 433
Wurtzel. Ihre Arten, IV. 43. Rechnung mit Buchstaben, 23 wie sie aus jeder Dignität zu ziehen, 594 Ausziehung, I. 76
Wurtzel der Gleichung. Erklärung, IV. 172 Eigenschafften, 173 174. 175. Veränderungen, 176 Schrancken, 87. Ausziehung, 184. Wie sie durch Näherung zu finden, 193
Wurtzel-Täffelein, 77
Wurtzel-Zeichen, IV. 23
Z Egedegerdisches Jahr, III. 531. wie sein Anfang zu finden, 532
Zapffen, 357
Zahl. Erklärung, 36 Beschaffenheit, 36 37. ihre Veränderungen, 37. 38. wie sie

sie ausgesprochen wird, 45.46
Zahl der Winckel in der Polygonal-Zahl, IV. 79
Zapffen-Stücke, II. 30 31
Zauber-Laterne, III. 107
Zehenecke. Wie seine Seite zu finden, IV. 106.107
Zehlen. Was es heisse, 36
Zehler eines Bruches, 71
Zeltdach, 461
Zeichen der Zahlen, 44
der Zeit, III. 537. 538
Zeichnen. Wie solches genau geschehen kan, III. 132
Zeichnung der Figuren, 127. was sie nutzet, 129
Zeiger. Die Mittags-Höhen zu finden, III. 204
Zeit. Wie man sie aus der Höhe der Sonne, III, 224
und der Sterne findet, 272, 274. 275
Zenith, III. 183
Zeugmeisterey-Kunst, II. 8
Zerstreuungs-Punct, III. 84
Ziegel. Wie sie zu streichen, 300. zu probiren, 303. 304
Ziegel-Erde, 303
Zieh-Panster, II. 302
Zieh-Pengel, II. 279
Zifern, 44
Zimmer. Ihre Figur, 424. Verhältnis der Länge zur Breite, 425
Höhe, 425. 426. wie sie anzulegen, 441 442
Zierrathen des Gebäudes. Erklärung, 286
wie viel sie nöthig, 287. 288
Zirckel 110
Zodiacus, III. 197
Zoll, Erklärung, 109
Zeichen, III
Zonæ frigidæ, III. 486 487

tem-

temperatæ, III. 486
487
Zona torridæ, III. 486
487
Zündloch im Stücke, II. 36
Zünd-Röhre in der Bombe, II. 56
Zusammendrücken, II 362
Zusammenkunfft, III. 438
Zusätze. Erklärung, 28. Unterscheid, 28
29
Zwerch-Axe, IV. 152
Zwey mittlere Proportional-Linien. Wie sie zu finden, IV. 228
Zwillinge, III. 196. 242
Zwischen-Tieffe, 328

Ende des Registers.

Druckfehler im ersten Theile.

Pag.	Lin.	Druckfehler.	wie sie zu ändern.
167	25	315	314
		264	265
234	14	Fig. 154	Fig. 152

Druckfehler im anderen Theile.

15	28	(§. 22)	(§. 20)
16	31	$4\frac{1}{2}$ Pf.	$4\frac{1}{2}$ L.
156	11	hoch	breit
169	10	22°.	38

Druck-

Druckfehler im vierdten Theile.

Pag.	Lin.	Druckfehler.	wie sie zu ändern.
22	4	y^n	y^m
71	5	y	y^n
	12	$b-a$	$b=a$
119	16	$4b^3c^3$	$4b^3c$
	19	b^2c^2	$4b^2c^2$
120	8	$20b^3c^2$	$20b^3c^3$
	28	$c^{m-4}b^4$	$c^{m-5}b^5$
123	2	(§. 187)	(§. 188)
	13	(§. 187)	(§. 188)
126	10	$-\frac{1}{13}V30$	$-\frac{1}{13}V3$
143	21	pm^2	pm^m
163	9	$x^m y^m$	$x^n y^m$
172	18	$p^n y^m$	$p^m y^n$
178	18	c^2qx^2	c^2qy^2
		c^3rx	c^3ry
138	18	$2ay^3V2$	$2ax^3V2$
	19	$4dy^2$	$4ay^3$
191	13	$-p$	$z+y$
239	21	(§. 366)	(§. 368)
247	17	$=r=$	$+r=$
274	8	(§. 47)	(§. 48)

Der

Bericht an den Buchbinder.

Die Kupffer müssen zu Ende einer jeden Disciplin dergestalt gebunden werden / das man sie gantz heraus schlagen kan/

nemlich im ersten Theile.

p. 238. Fig. Geom. Tab. I. biß XXIV.
p. 278. Trigon. Tab. I. biß III.
p. 470. Archit. Tab. I. biß XXX.

In andern Theile.

p. 78. Fig. Artiller. Tab. I. biß VII.
324. Archit mil. Tab. I. -- XII.
322. Mechan. Tab. I. -- VI.
256 Hydrostat. Tab.
388. Aërometr. Tab.
424. Hydraul. Tab. I. biß III.

In dritten Theile.

p. 44. Fig. Optic. Tab.
69. Catopr. Tab.
117. Dioptr. Tab. I. II.
132. Perspect. Tab. I. II. III.
174. Trig. Sphær. Tab.
470. Astron. Tab. I. biß VIII.
509. Geogr. Tab.
589. Gnomon. Tab. I. II. III.

Im vierdten Theile.

p. 284. Fig. Algebr- Tab. I. biß XI.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wolff, Christian von, 1679-1754

Der Anfangs-Gruende Aller Mathematischen Wissenschafften ... Theil

Bd.: 4

Halle im Magdeburgischen 1717

Math.u. 213 b-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594373-5
VD18 80247164-001